بسم‌الله الرحمن الرحیم

تصمیم‌گیری چندشاخصه غیرقطعی: روشها و کاربردها

مؤلف:

Zeshui Xu

ترجمه:

دکتر مهدی غضنفری، مهندس حامد کلانتری، مهندس عرفان محبی‌جو

انتشارات دانشگاه علم‌وصنعت ایران

سرشناسه :

عنوان وپدیدآور :

مشخصات نشر :

مشخصات ظاهری :

شابک :

فهرست نویسی :

موضوع :

شناسه افزوده :

رده بندی کنگره :

رده بندی دیویی :

شماره کتابخانه ملی :

- مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران-نارمک صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴ تلفن: ۷۷۲۴۰۴۲۵- دورنگار: ۷۷۲۴۰۲۲۵
- فروشگاه : میدان رسالت- خیابان هنگام – خیابان دانشگاه– دانشگاه علم وصنعت
- پست الکترونیک: Publication@sun.iust.ac.ir

نام کتاب: تصمیم‌گیری چندشاخصه غیرقطعی: روشها و کاربردها

تالیف: زشویی ژو

ترجمه: مهدی غضنفری، حامد کلانتری، عرفان محبی‌جو

صفحه‌آرایی: بدیعی، اقدس

طراح جلد: بدیعی، اقدس

چاپ اول: ۱۳۹۸

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

قیمت: ۸۵۰۰۰۰ ریال

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۴۵۴-۳۳۵-۷

ISBN: 978-964-454-335-7

پیشگفتار

با پیچیده شدن محیط و شرایط تصمیم‌گیری، لازم است مقامات، مدیران اجرایی، سرمایه‌گذاران و تصمیم‌گیران، مدلها و شیوه‌های متناسبی را بکار بگیرند. مسائل جدید اجتماعی، اقتصادی، سیاسی و امنیتی عموماً بجای یک هدف و یا ویژگی با چندین هدف و یا ویژگی (و بعضاً با چندین محدودیت) مواجه هستند. به این دلیل دسته‌ای از مدلهای جدید بهینه‌سازی تحت عنوان مدلهای تصمیم‌گیری چندمعیاره[1] بوجود آمدند. در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره تصمیم‌گیرنده با تعدادی تابع هدف و یا شاخصه روبرو است که باید تصمیم بهینه را برگزینند. مدلهای تصمیم‌گیری چندمعیاره خود به دو گونه اصلی تحت عنوان تصمیم‌گیری چندهدفه[2] و تصمیم‌گیری چند شاخصه[3] تقسیم می‌شوند. فضای جواب در گونه اول پیوسته و در گونه دوم گسسته است. برخی از متخصصان، مدلهای تصمیم‌گیری چند شاخصه را حالت خاصی از تصمیم‌گیری چندهدفه می‌دانند که تصمیم‌گیرنده با تعداد محدودی از گزینه‌ها[4] مواجه است. موضوع این کتاب، معرفی روشهای تصمیم‌گیری چند شاخصه در شرایط غیرقطعی است، که بخش مهمی از علم تصمیم‌گیری نوین می‌باشد. نظریه و روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه در حوزه‌هایی همچون پروژه‌های مهندسی، اقتصاد، مدیریت و نیز امور نظامی بکار گرفته شده است. نمونه‌ای از زمینه‌های مختلف کاربردی در این حوزه‌ها عبارتند از: تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاریهای اقتصادی، ارزیابی طرحهای سرمایه‌گذاری خطرپذیر، مکان‌یابی تسهیلات و تجهیزات، تصمیم‌گیری در فرایند مزایده و یا مناقصه، خدمات نگهداری و تعمیرات، ارزیابی کارایی سیستم نظامی، رتبه‌بندی مناطق صنعتی توسعه‌یافته، ارزیابی جامع عملکرد اقتصادی و امثال آن. تصمیم‌گیری چندشاخصه به دنبال انتخاب جذابترین گزینه (یا گزینه‌ها) از میان چند گزینه با بکارگیری روشی مناسب است. این رویکرد عمدتاً شامل دو گام اصلی است:

گام اول) جمع‌آوری اطلاعات تصمیم: اطلاعات تصمیم عموماً شامل وزن و مقدار شاخصه‌ها[5] است. این اوزان و مقادیر می‌توانند در قالب اعداد حقیقی، اعداد فاصله‌ای یا عبارات بیان شوند. شایان ذکر است که چگونگی تعیین وزن شاخصه‌ها موضوع مهمی در تحقیقات حوزه تصمیم‌گیری چندشاخصه است.

---
[1] Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
[2] Multiple Objective Decision Making (MODM)
[3] Multiple Attribute Decision Making (MADM)
[4] Alternative
[5] Attribute

گام دوم) تجمیع و تلفیق اطلاعات تصمیم با استفاده از روشهای مناسب: چهار تکنیک بسیار رایج در زمینه تجمیع اطلاعات تصمیم شامل: عملگر میانگین وزندار، عملگر هندسی وزندار، عملگر میانگین وزندار ترتیبی و عملگر هندسی وزندار ترتیبی.

در چند دهه اخیر با گسترش روزافزون پیچیدگی و عدم قطعیت اهداف و فازی بودن تفکر انسان، توجه بیشتری به تصمیم‌گیری چندشاخصه در محیطهای غیرقطعی شده و دستاوردهای زیادی در این زمینه حاصل شد. کتاب حاضر مجموعه‌ای نظام‌مند در مورد روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه غیرقطعی و نیز کاربردهای متفاوت آنها را ارائه می‌دهد. مطالب کتاب در چهار بخش که جمعاً دربرگیرنده دوازده فصل است سازماندهی گردید.

بخش اول کتاب که شامل فصول اول تا سوم است، به بیان روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد حقیقی و کاربردهای مختلف آن می‌پردازد. به طور خلاصه فصل اول به معرفی روشهایی برای حل مسائل تصمیم‌گیری می‌پردازد که در آنها اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و مقادیر شاخصه‌ها اعداد حقیقی هستند. مدلهایی از این دست در زمینه‌هایی همچون تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاری در شرکتها و سیستمهای اطلاعاتی کاربرد دارند. نمونه‌هایی از کاربرد چنین روشی عبارتند از: ارزیابی تجهیزات هوافضا، ارزیابی مالی دانشگاه‌ها، انتخاب هواپیما برای انجام پروازهای آموزشی، خرید جنگنده و تجهیزات توپخانه‌ای، تولید محصولات جدید و ارزیابی کادر یک سازمان برای ارتقا و انتصاب.

فصل دوم این کتاب به بیان روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه می‌پردازد که در آنها اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها به صورت ترجیحی بیان می‌شود و مقادیر شاخصه‌ها اعداد حقیقی هستند. این مدلها در زمینه‌هایی مانند ارزیابی کارایی (سیستمهای پشتیبان) نگهداری تجهیزات و ارزیابی عملکرد واحدهای عملیات نظامی کاربرد دارند.

فصل سوم به بیان روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه‌ای می‌پردازد که در آنها اطلاعات جزئی در مورد وزن شاخصه‌ها وجود داشته و مقادیر شاخصها اعدادی دقیق هستند. همچنین کاربرد این مدلها در مواردی همانند استقرار سامانه آتش در نبرد دفاعی، ارزیابی و رتبه‌بندی مناطق ویژه اقتصادی صنعتی، ارزیابی توسعه معادن ذغال‌سنگ، رتبه‌بندی اماکن تحت آتش احتمالی در حمله دشمن، بهبود محصولات قدیمی و انتخاب یک خانه از میان گزینه‌های خرید خانه تشریح خواهد شد.

بخش دوم کتاب که شامل فصول چهارم تا ششم کتاب است، به معرفی روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد فاصله‌ای می‌پردازد. به طور خلاصه فصل چهارم روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه را دربر می‌گیرد که در آنها وزن شاخصه‌ها اعداد حقیقی و مقادیر آنها در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شود. کاربردهای آن در مواردی همچون ارزیابی اعضای هیئت علمی یک دانشگاه، انتخای روش طراحی با قابلیت نگهداری، بهره‌برداری از صنعت چرم یک منطقه، مدل جدیدی از اتومبیلهای یک شرکت سرمایه‌گذاری و انتخاب نوعی از ربات از میان انواع رباتهای یک شرکت تولیدی پیشرفته بیان می‌گردد.

فصل پنج به بیان مسائلی می‌پردازد که در آنها اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و مقادیر شاخصه‌ها به صورت اعداد فاصله‌ای بیان می‌شود و کاربردهایی از آن در موضوعاتی همانند خرید تجهیزات نظامی و اسلحه، انتخاب کادر ستادی برای یک سازمان و تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاری در منابع طبیعی تشریح می‌گردد.

فصل ششم به بیان روشهایی می‌پردازد که در آنها اطلاعات جزئی در مورد وزن شاخصه‌ها وجود دارد. همچنین، کاربردهایی از این روشها در مواردی از قبیل: تعیین نوع سیستم تهویه هوا به‌منظور نصب در یک کتابخانه، ارزیابی عملکرد سامانه‌های موشکی ضد کشتی، انتخاب یخچال برای یک خانواده، ارزیابی سرمایه‌گذاری بر روی پروژه‌هایی با فناوری سطح بالا در شرکتهای سرمایه‌گذاری خطرپذیر و خرید کتب دانشگاهی تشریح می‌گردد.

بخش سوم کتاب که شامل فصول هفتم الی نهم است، به بیان روشهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با عبارات زبانی و کاربرد آنها می‌پردازد. به طور خلاصه فصل هفتم به روشهایی اختصاص دارد که در آنها اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و مقادیر شاخصه‌ها در قالب واژگان زبانی بیان می‌شوند. همچنین، کاربردهایی از این روشها در مواردی همانند تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاری در شرکتها، استقرار سامانه آتش‌بار در جنگ و ارزیابی عملکرد مدیریت دانش شرکتها مطرح می‌گردد.

در فصل هشتم به بیان روشهایی پرداخته شده که در آنها وزن شاخصه‌ها اعداد حقیقی و مقادیر آن در قالب واژگان زبانی بیان می‌شود و کاربردهایی از آن در موضوعاتی همچون ارزیابی سیستمهای اطلاعات مدیریت شرکتها و ارزیابی بهترین پایان‌نامه‌ها بیان می‌گردد.

در فصل نهم روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه تشریح می‌گردند که در آنها نه تنها وزن شاخصه‌ها در قالب واژگان زبانی بلکه مقادیر این شاخصه‌ها نیز در قالب واژگان زبانی بیان می‌شوند. کاربردهایی از این مفاهیم در مواردی از قبیل انتخاب شریک برای یک شرکت مجازی و ارزیابی کیفیت معلمان در یک مدرسه راهنمایی مطرح می‌گردد.

بخش چهارم که شامل فصول دهم الی دوازدهم است، به بیان روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه می‌پردازد که در آنها از واژگان زبانی غیرقطعی استفاده می‌گردد. در فصل دهم به معرفی روشهایی برای مسائل تصمیم‌گیری خواهیم پرداخت که در آن اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم بوده و مقادیر این شاخصه‌ها شامل واژگان زبانی غیرقطعی است. همچنین، کاربردی از آنها در زمینه انتخاب شریک استراتژیک در یک شرکت فعال در حوزه مدیریت زنجیره تأمین بیان شده است.

فصل یازدهم به بیان روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه می‌پردازد که در آنها وزن شاخصه‌ها اعداد حقیقی است و مقادیر آنها در قالب واژگان زبانی غیرقطعی بیان می‌شود و نیز کاربردهای آن در زمینه‌هایی همچون برآورد و انتخاب مناطقی به منظور سرمایه‌گذاری و انتخاب تأمین‌کننده خدمات نگهداری و تعمیرات شرکتهای تولیدی بیان شده است.

در فصل دوازدهم روشهایی از تصمیم‌گیری چندشاخصه بیان می‌شود که در آنها وزن شاخصه‌ها در قالب اعداد فاصله‌ای و مقادیر آنها در قالب واژگان زبانی غیرقطعی است. همچنین، کاربردهایی این روشها در زمینه ارزیابی سیستمهای اقتصادی اجتماعی شهرها تشریح می‌گردد.

این کتاب می‌تواند به عنوان مرجعی برای محققان و فعالان حوزه ریاضیات فازی، تحقیق در عملیات، علم اطلاعات، علم مدیریت، مهندسی و امثال آن باشد. همچنین، از این کتاب می‌توان به منظور تدریس در مقاطع تحصیلات تکمیلی و سال آخر دوره‌های کارشناسی بهره‌برداری نمود.

فهرست مطالب

بخش اول

روشها و کاربردهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با مقادیر حقیقی

فصل اول

حل مسائل *MADM* با مقادیر حقیقی شاخص‌ها و اوزان نامعلوم

تصمیم‌گیری چندشاخصه[1] (*MADM*) به دنبال یافتن جذاب‌ترین گزینه از میان مجموعه‌ای از گزینه‌های محدود با توجه به چند شاخصه معین و با استفاده از روشی متناسب با داده‌های مسئله است. حال سوال این است که تصمیم‌گیری در شرایطی که اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم بوده و مقادیر شاخصه‌ها نیز مقادیر حقیقی باشند چگونه خواهد بود؟ با در نظر گرفتن این موضوع، در این فصل به معرفی چند عملگر رایج به منظور تجمیع و تلفیق اطلاعات هستیم. این عملگرها عبارتند از: عملگر میانگین وزن‌دار[2] ، عملگر هندسی وزن‌دار[3] ، عملگر میانگین وزن‌دار ترتیبی[4] ، عملگر هندسی وزن‌دار ترتیبی[5] ، عملگر میانگین وزن‌دار ترکیبی[6] ، عملگر هندسی وزن‌دار ترکیبی[7] و موارد دیگری از همین دست.

[1] Multi Attribute Decision Making (MADM)
[2] Weighted Averaging (WA)
[3] Weighted Geometric (WG)
[4] Ordered Weighted Averaging (OWA)
[5] Ordered Weighted Geometric (OWG)
[6] Combined Weighted Averaging (CWA)
[7] Combined Weighted Geometric (CWG)

بر مبنای این عملگرهای تجمیع، روشهای کاربردی و ساده‌ای را برای تصمیم‌گیری چندشاخصه ارائه می‌کنیم. همچنین، به ارائه روشهایی تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر بیشترین انحرافات[۱] ، آنتروپی اطلاعات[۲] و نیز اطلاعات ترجیحی در مورد گزینه‌ها می‌پردازیم. به علاوه، یک مدل بیشینه‌سازی توافق جمعی[۳] برای تعیین وزن شاخصه‌ها در تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی[۴] را ارائه می‌دهیم. در ادامه، این روشها را با برخی مثالهای کاربردی تشریح خواهیم کرد.[۵]

۱-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر OWA

۱-۱-۱ عملگر میانگین وزندار ترتیبی (OWA)

یاگر[۶] در سال (۱۹۸۸) برای تلفیق و تجمیع اطلاعات تصمیم در مسائل $MADM$، یک تابع غیرخطی ساده را توسعه داد که به شکل زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱ تابع OWA را بصورت $OWA: \Re^n \to \Re$ یعنی تابعی از R^n به روی R در نظر بگیرید. (یاگر، (۱۹۸۸)) حال اگر داشته باشیم:

$$OWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \quad (۱-۱)$$

---

[1] Maximizing Deviations

[2] Information Entropy

[3] Consensus Maximization Model

[4] Multi-Attribute Group Decision Making (MAGDM)

[5] در این کتاب از اختصارات متعددی استفاده شده است. مثلا به جای لفظ "تصمیم‌گیری چندشاخصه" از عبارت مخفف شده MADM، به جای "تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی" از عبارت MAGDM، به جای میانگین وزن‌دار از WA، به جای هندسی وزن‌دار از WG، به جای میانگین وزن‌دار ترتیبی از OWA، به جای هندسی وزن‌دار ترتیبی از OWG، به جای میانگین وزن‌دار ترکیبی از CWA و به جای وزن‌دار هندسی ترکیبی از CWG استفاده شده است.

[6] Yager (1988)

آنگاه تابع OWA را عملگر OWA نامند که در آن مقدار b_j به لحاظ بزرگی، jامین مقدار بزرگ در میان عناصر آرگومانها یا نشانوندهای[1] $a_i\,(i=1, 2, ...n)$ می‌باشد. این بدان معنی است که نشانوندهای $b_j\,(j=1, 2, ...n)$ به صورت نزولی مرتب شده‌اند: $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ و $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار اوزان تابع OWA بوده و مجموع آنها برابر یک است. ضمناً $\Re$ مجموعه اعداد حقیقی است.

جنبه اساسی عملگر میانگین وزندار ترتیبی (OWA) مرحله **مرتب‌سازی مجدد** آن است. یعنی باید توجه داشت که، عنصری همانند a_i با وزنی همچون ω_i مرتبط نیست، بلکه این وزن ω_i است که با یک موقعیت مرتب شده مشخص از i امین آرگومان یا نشانوند $a_i\,(i=1, 2, ...n)$ مرتبط است. از این‌رو می‌توان گفت ω_i وزن مرتبط با موقعیت iام است.

مثال ۱-۱ فرض کنید $\omega=(0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$ بردار وزن عملگر OWA بوده و $(7, 18, 6, 2)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد، آنگاه OWA مرتبط با آن بصورت زیر خواهد شد:

$$OWA_{\omega}(7,\ 18,\ 6,\ 2)=0.4\times 18+0.1\times 7+0.2\times 6+0.3\times 2=9.70$$

توجه کنید که اولین عنصر وزنی عملگر یعنی ۰٫۴، در دومین نشانوند یعنی ۱۸ ضرب شده؛ چون مقدار این نشانوند، بزرگترین مقدار در میان این چهار نشانوند است. بعد از آن، عنصر وزنی دوم، سوم و چهارم بترتیب در سایر مقادیر نشانوندهای دیگر از بزرگ به کوچک ضرب شده‌اند. در اینجا، بزرگی یا کوچکی عناصر وزنی عملگر مدنظر نیست بلکه بزرگی و کوچکی مقادیر نشانوند مورد توجه است. لذا، نهایتاً میانگین وزندار مرتب این چهار نشانوند برابر ۹٫۷۰ می باشد. در عمل این بدان معناست که برای استفاده از این عملگر، باید ابتدا نشانوندها را بصورت نزولی مرتب کرد و سپس در اوزان عملگر ضرب کرده و حاصلضرب را با هم جمع کرد.

اکنون برخی خواص مطلوب عملگر OWA را معرفی می‌کنیم:

---

[1] Arguments

قضـیه ۱-۱ (یاگر، (۱۹۸۸)[1]) فرض کنید $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ یک بردار از نشـانوندها و $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ برداری از عناصـر درون $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ باشـد به گونه‌ای که β_j عملاً j امین مقدار بزرگ از $\alpha_i (i=1, 2, ...n)$ باشد، یعنی داشته باشیم $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$، آنگاه خواهیم داشت:

$$OWA_\omega(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

اثبات

$$OWA_\omega(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j'$$
$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j$$

که b_j' عملاً j امین مقدار بزرگ $\beta_i (i=1, 2, ..., n)$ می باشـد و b_j نیز j امین مقدار بزرگ $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ اسـت. از آنجا که $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ برداری اسـت که در آن β_jها به صـورت نزولی متناسـب با عناصـر $\alpha_i (i=1, 2, ...n)$ مرتب شـده‌اند، بنابراین $b_j' = b_j$ اسـت که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲-۱ (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3)$ و $(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n')$ دو بردار نشانوند باشند، به طوری که به ازای هر i داشته باشیم $\alpha_i \geq \alpha_i'$ و $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ و $\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq ... \geq \alpha_n'$، آنگاه:

$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq OWA_\omega(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n')$$

اثبات با توجه تعریف داریم:

$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j$$
$$OWA_\omega(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n') = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j'$$

که در روابط فوق b_j به‌عنوان j امین مقدار بزرگ $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ و b_j' به عنوان j امین مقدار بزرگ α_i' است. از آنجاکه $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$ و $\alpha_1' \geq \alpha_2' \geq ... \geq \alpha_n'$ می‌باشد، بنابراین $b_j = \alpha_j$ و

[1] Yager (1988)

$b_j^{'} = \alpha_j^{'}$ می‌باشد. همچنین، از آنجا که $\alpha_i \geq \alpha_i{'}$ است، بنابراین $b_j \geq b_j^{'}$ می‌باشد. از این‌رو، $\sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \geq \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j^{'}$ است. به عبارتی $OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq OWA_{\omega}(\alpha_1{'}, \alpha_2{'}, ..., \alpha_n{'})$ است.

نتیجه ۱-۱ (یکنوایی[1]) (یاگر، (۱۹۸۸)[2]) فرض کنید $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3)$ و $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_3)$ دو بردار از آرگومانها یا نشانوندها باشند. اگر $\alpha_i \leq \beta_i$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq OWA_{\omega}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

نتیجه ۱-۲ (جابجایی[3]) (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ جایگشتهایی[4] از عناصر $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ باشند، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

قضیه ۱-۳ (خودتوانی[5]) (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ هر برداری از نشانوندها باشد و اگر برای تمام iها داشته باشیم $\alpha_i = \alpha$، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha$$

اثبات از آنجاکه $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ است، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha = \alpha \sum_{j=1}^{n} \omega_j = \alpha$$

قضیه ۱-٤ (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $\omega = \omega^* = (1, 0, ..., 0)$ باشد، آنگاه:

---

[1] Monotonicity
[2] Yager (1988)
[3] Commutativity
[4] Permutation
[5] Idempotency

$$OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \max_i\{\alpha_i\}$$

اثبات با توجه به تعریف (۱-۱)، آنگاه:

$$OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = b_1 = \max_i\{\alpha_i\}$$

قضیه ۱-۵ (یاگر، (۱۹۸۸)[۱]) اگر $\omega = \omega_* = (0, 0, ..., 1)$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \min_i\{\alpha_i\}$$

اثبات اثبات این قضیه نیز منطبق بر تعریف (۱-۱) است که آنگاه:

$$OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = b_n = \min_i\{\alpha_i\}$$

قضیه ۱-٦ (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $\omega = \omega_{Ave} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j$$

قضیه ۱-۷ (یاگر، (۱۹۸۸)) اگر $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3)$ هر برداری از آرگومانها یا نشانوندها باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \geq OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

اثبات

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_1 = b_1 = OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \geq \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_n = b_n = OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

که اثبات فوق کامل می‌شود.

مطابق همین اثباتها، نتایج زیر نیز معتبر است.

---

[1] Yager (1988)

قضیه ۸-۱ (یاگر، (۱۹۹۳)[1]) اگر مقادیر $\omega_j = 1$ و $\omega_i = 0$ باشند، به طوری که $i \neq j$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = b_j$$

که b_j، در عمل jامین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوند $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ است. به طور خاص اگر $j = 1$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

و اگر $j = n$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

قضیه ۹-۱ (یاگر، (۱۹۹۳)) اگر $\omega_1 = \alpha$ و $\omega_i = 0$ باشند که $i = 2, ..., n-1$ و $\omega_n = 1 - \alpha$ بطوریکه $\alpha \in [0, 1]$ باشد، آنگاه:

$$\alpha OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (1-\alpha) OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$
$$= OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

قضیه ۱۰-۱ (یاگر، (۱۹۹۳))

۱) اگر مقادیر $\omega_i = \frac{1-\alpha}{n}$، $\omega_1 = \frac{1-\alpha}{n} + \alpha$ به ازای $i \neq 1$ و $\alpha \in [0, 1]$ باشند، آنگاه:

$$\alpha OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (1-\alpha) OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$
$$= OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

به طور خاص اگر $\alpha = 0$، آنگاه:

$$OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

و اگر $\alpha = 1$، آنگاه:

$$OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

---

[1] Yager (1993)

۲) اگر $\omega_n = \frac{1-\alpha}{n} + \alpha$, $i \neq n$, $\omega_i = \frac{1-\alpha}{n}$ به ازای $\alpha \in [0, 1]$ باشند، آنگاه:

$$\alpha OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (1-\alpha) OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$
$$= OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

به طور خاص اگر $\alpha = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

و اگر $\alpha = 1$ باشد، آنگاه:

$$OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

۳) اگر

$$\omega_1 = \frac{(1-(\alpha+\beta))}{n} + \alpha \quad , \quad \omega_i = \frac{(1-(\alpha+\beta))}{n} \quad , \quad i = 2, ..., n-1,$$
$$\omega_n = \frac{(1-(\alpha+\beta))}{n} + \beta; \quad \alpha,\ \beta \in [0, 1]; \quad \alpha + \beta \leq 1$$

آنگاه:

$$\alpha OWA_{\omega^*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + \beta OWA_{\omega_*}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$
$$+ (1-(\alpha+\beta)) OWA_{\omega_{Ave}}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

به طور خاص اگر $\beta = 0$ باشد، حالت ۳ به حالت ۱ و همچنین اگر $\alpha = 0$ باشد، حالت ۳ به حالت ۲ تبدیل خواهد شد.

قضیه ۱۱-۱ (یاگر، (۱۹۹۳)[1])

(۱) اگر

[1] Yager (1993)

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & i < k \\ \dfrac{1}{m} & k \le i < k+m \\ 0 & i \ge k+m \end{cases}$$

که k و m اعداد صحیح و $k+m \le n+1$ می‌باشد، آنگاه:

$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{m} \sum_{j=k}^{k+m-1} b_j$$

که در آن b_j، در عمل j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندها یا آرگومانهای $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ است.

(۲) اگر

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & i < k-m \\ \dfrac{1}{2m+1} & k-m \le i < k+m \\ 0 & i \ge k+m \end{cases}$$

که در رابطه فوق $k+m \le n+1,\ \ k \ge m+1$ باشد، آنگاه:

$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=k-m}^{k+m-1} b_j$$

که b_j، نشاندهنده j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندها $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ است.

(۳) اگر

$$\omega_i = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & i \le k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

آنگاه:

$$OWA_\omega(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} b_j$$

که b_j به عنوان j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندها $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ است.

(۴) اگر

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & i < k \\ \dfrac{1}{(n+1)-k} & i > k \end{cases}$$

آنگاه:

$$OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{(n+1)-k} \sum_{j=k}^{n} b_j$$

که b_j، به عنوان j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندها $\alpha_i (i=1, 2, ..., n)$ است.

۲-۱-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه براساس آنچه تاکنون پیرامون عملگر میانگین وزندار ترتیبی (OWA) بیان شد، روش مناسبی را برای حل مسائل $MADM$ ارائه می‌دهیم:

گام ۱) برای یک مسئله $MADM$، فرض کنید $X = \{x_1, x_2, ..., x_3\}$ مجموعه متناهی از گزینه‌ها و $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ نیز مجموعه‌ای از شاخصه‌ها باشد که اطلاعات وزن آنها کاملاً نامعلوم باشد. تصمیم‌گیرنده، گزینه‌های x_i را با توجه به عنوان شاخصه‌های u_i ارزیابی کرده و مقدار شاخصه a_{ij} را بدست می‌آورد (یعنی تعیین عملکرد جزئی گزینه‌ها). تمامی a_{ij}ها در ماتریس تصمیم[۱] $A = (a_{ij})_{n \times m}$ قرار می‌گیرند. این ماتریس در جدول (۱-۱) نمایش داده شده است.

به طور کلی، شش نوع شاخصه در مسائل $MADM$ وجود دارد که بصورت زیر می‌باشد:

- نوع منفعتی (هرچه مقدار شاخصه بیشتر باشد، آن شاخصه، بهتر است)

[1] Decision Matrix

- نوع هزینه‌ای (هرچه مقدار شاخصه کمتر باشد، آن شاخصه، بهتر است)
- نوع ثابت (هرچه مقدار شاخصه به یک مقدار ثابت خاص –یا نقطه مطلوب– نزدیک‌تر باشد، بهتر است)
- نوع مغایرتی (هرچه مقدار شاخصه از یک مقدار خاص –یا نقطه نامطلوب– دورتر بوده یا با آن مغایرت یا انحراف داشته باشد، بهتر است)
- نوع فاصله‌ای (هرچه مقدار شاخصه به یک بازه ثابت –فاصله نامطلوب– همچون $[q_1^j, q_2^j]$ نزدیکتر باشد بهتر است، این موضوع شامل موقعیتهایی که مقدار شاخصه درون آن بازه قرار می‌گیرد نیز می‌شود)
- نوع فاصله‌ای مغایرتی (هرچه مقدار شاخصه از یک بازه ثابت –فاصله نامطلوب– دورتر بوده و یا با آن مغایرت و انحراف داشته باشد بهتر است).

فرض کنید $I_i (i = 1, 2, ..., 6)$ شامل مجموعه انواع شاخصه‌های مذکور باشد.

جدول ۱-۱ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	$\cdots$	u_m
x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

در مسائل کاربردی، واحد سنجش یا اصطلاحا بُعد[1] شاخصه‌های مختلف ممکن است متفاوت باشد. به منظور بی‌مقیاس‌سازی تمام شاخصه‌ها و تسهیل مقایسات بین شاخصه‌ها، هر شاخصه a_{ij} در ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ را با استفاده از روابط زیر نرمال می‌کنیم:

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}}{\max\limits_{i}\{a_{ij}\}}\quad,\quad i=1,2,...n;\qquad j\in I_1 \tag{۱-۲}$$

$$r_{ij}=\frac{\min\limits_{i}\{a_{ij}\}}{a_{ij}}\quad,\quad i=1,2,...,n;\qquad j\in I_2 \tag{۱-۳}$$

یا

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}-\min\limits_{i}\{a_{ij}\}}{\max\limits_{i}\{a_{ij}\}-\min\limits_{i}\{a_{ij}\}}\ ,\ \ i=1,2,...,n;\ \ j\in I_1 \tag{۱-۲ الف}$$

$$r_{ij}=\frac{\max\limits_{i}\{a_{ij}\}-a_{ij}}{\max\limits_{i}\{a_{ij}\}-\min\limits_{i}\{a_{ij}\}}\ ,\ \ i=1,2,...,n;\ j\in I_2 \tag{۱-۳ الف}$$

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}-\alpha_j}{\max\limits_{i}\{|a_{ij}-\alpha_j|\}}\ ,\ \ i=1,2,...,n;\ j\in I_3 \tag{۱-۴}$$

$$r_{ij}=|a_{ij}-\alpha_j|-\frac{\min\limits_{i}\{|a_{ij}-\alpha_j|\}}{\max\limits_{i}\{|a_{ij}-\alpha_j|\}-\min\limits_{i}\{|a_{ij}-\alpha_j|\}}\ ,\ \ i=1,2,...,n;\ j\in I_4 \tag{۱-۵}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{\max\limits_{i}\left\{q_1^j-a_{ij},\,a_{ij}-q_2^j\right\}}{\max\limits_{i}\left\{q_1^j-\min\limits_{i}\{a_{ij}\},\ \max\limits_{i}\{a_{ij}\}-q_2^j\right\}}\ , & a_{ij}\notin\left[q_1^j,q_2^j\right]\\ 1, & a_{ij}\in\left[q_1^j,q_2^j\right]\end{cases}$$

$$i=1,2,...,n \tag{۱-۶}$$

[1] Dimensions

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\max\limits_i\left\{q_1^j-a_{ij},\, a_{ij}-q_2^j\right\}}{\max\limits_i\left\{q_1^j-\min\limits_i\{a_{ij}\},\ \max\limits_i\{a_{ij}\}-q_2^j\right\}}, & a_{ij}\notin\left[q_1^j,\, q_2^j\right]\\ 1, & a_{ij}\in\left[q_1^j,\, q_2^j\right]\end{cases}$$
$$i=1,2,...,n,\quad j\in I_6 \qquad (۱-۷)$$

پس از استفاده از روابط فوق، بسته به نوع اطلاعات مسئله، ماتریس نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ ساخته می‌شود.

گام ۲) از عملگر میانگین وزندار ترتیبی (OWA) به منظور تجمیع تمام مقادیر شاخصه‌های $r_{ij}\,(j=1,2,...,m)$ برای هر گزینه x_i استفاده کرده و مقدار کلی شاخصه $z_i(\omega)$ (یعنی عملکرد کلی گزینه‌ها) را محاسبه نمائید:

$$z_i(\omega)=OWA_\omega(r_{i1},r_{i2},...,r_{im})=\sum_{j=1}^{m}\omega_j b_{ij}$$

که در آن b_{ij} نشاندهنده j امین مقدار بزرگ $r_{ij}\,(j=1,2,...,m)$ و $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ بردار وزن عملگر OWA است (مجموع عناصر بردار وزن، برابر یک و همگی آنها مقداری بیشتر یا برابر با صفر دارند). اوزان مذکور را می‌توان از روشهای ارائه شده در بخش (۱-۱) یا مدل مبتنی بر توزیع نرمال (توزیع گوسی[1]) به دست آورد (ژوو، (۲۰۰۵)[2] و یاگر، (۲۰۰۷)[3]):

$$\omega_j=\frac{e^{-\frac{(j-\mu_m)^2}{2\sigma_m^2}}}{\sum\limits_{i=1}^{m}e^{-\frac{(j-\mu_m)^2}{2\sigma_m^2}}},\quad j=1,2,...,m$$

که در رابطه فوق داریم:

$$\mu_m=\frac{1}{2}(1+m),\quad \sigma_m=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(i-\mu_m)^2}$$

[1] Gaussian Distribution
[2] Xu (2005c)
[3] Yager (2007)

ویژگی بارز روش فوق این است که با تخصیص اوزان کوچک به قضاوتهای نادرست یا سوگیرانه[1] می‌تواند اثر اینگونه قضاوتهای غیرمنصفانه یا جانبدارنه درباره تصمیم را تخفیف دهد.

گام ۳) تمامی گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ را منطبق بر مقدار کلی شاخصه‌های $z_i(\omega)(i=1, 2, ..., n)$ به صورت نزولی مرتب نمائید.

۳-۱-۱ مثال کاربردی

مثال ۲-۱ مسئله تصمیم‌گیری چندشاخصه‌ای را در نظر بگیرید که در آن یک بانک سرمایه‌گذاری قصد دارد مبلغی را بر روی طرح توسعهٔ چند شرکت کاندید، سرمایه‌گذاری کند. چهار شرکت (x_i) برای انتخاب، پیش روی بانک وجود دارد که این بانک باید از میان آنها بهترین را برگزیند. بانک مذکور با استفاده از پنج شاخصه، قصد ارزیابی شرکتها را دارد. (لیو و لیو، (۱۹۹۹)[2]) این پنج شاخصه عبارتند از: (۱) u_1: ارزش خروجی، (۲) u_2: هزینه سرمایه‌گذاری، (۳) u_3: حجم فروش، (۴) u_4: سهم درآمد ملی و (۵) u_5: سطح آلودگی زیست‌محیطی. بانک سرمایه‌گذاری، عملکرد چهار ساله شرکتهای مورد نظر را با توجه به شاخصهای تعریف شده ارزیابی می‌کند. سطوح آلودگی زیست محیطی از واحد حفاظت محیط زیست این شرکتها بدست می‌آید. مقادیر این ارزیابی در ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{4\times5}$ که در جدول (۱-۲) قرار دارد، نشان داده شده است.

جدول ۲-۱ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	8350	5300	6135	0.82	0.17
x_2	7455	4952	6527	0.65	0.13
x_3	11000	8001	9008	0.59	0.15
x_4	9624	5000	8892	0.74	0.28

[1] False or Biased Arguments
[2] Liu and Liu (1999)

جدول ۳-۱ ماتریس تصمیم نرمال R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.7591	0.9343	0.6811	1.0000	0.7647
x_2	0.6777	1.0000	0.7246	0.7926	1.0000
x_3	1.0000	0.6189	1.0000	0.7195	0.8667
x_4	0.8749	0.9904	0.9871	0.9024	0.4643

از میان پنج مشخصه ارزیابی فوق، شاخصه‌های u_2 و u_5 از نوع هزینه و باقی آنها از نوع سود هستند. همچنین اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است. با توجه به این نکته که شاخصه‌های مسئله از دو نوع سود و هزینه‌اند، در ابتدا شاخصه‌ها را با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) تبدیل می‌نمائیم. به عبارتی، شاخصه‌هایی که از جنس هزینه هستند را به جنس سود تبدیل می‌کنیم. پس از آن، همانگونه که در جدول (۳-۱) نشان داده شد، ماتریس را نرمال می‌نمائیم.

سپس، به منظور تلفیق و تجمیع تمامی مقادیر شاخصه‌های r_{ij} مربوط به شرکت x_i و محاسبه مقدار کلی شاخصه $z_i(\omega)$ از عملگر *OWA* (۱-۱) استفاده می‌گردد. (بی آنکه به کلیت بحث خللی وارد شود) فرض کنید از روش بیان شده در قضیه (۱-۱۰) برای تعیین بردار وزن عملگر *OWA* استفاده شده و بردار وزن $\omega = (0.36, 0.16, 0.16, 0.16, 0.16)$ بدست آمده است. همچنین، $\alpha = 0.2$ در نظر گرفته شد. با توجه به این فروض داریم:

$$\begin{aligned}
z_1(\omega) &= OWA_\omega(r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}) \\
&= 0.36\times 1 + 0.16\times 0.9343 + 0.16\times 0.7647 + 0.16\times 7595 + 0.16\times 0.6811 \\
&= 0.8618 \\
z_2(\omega) &= OWA_\omega(r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}) \\
&= 0.36\times 1.0000 + 0.16\times 1.0000 + 0.16\times 0.7926 + 0.16\times 0.7246 + 0.16\times 0.6777 \\
&= 0.8712 \\
z_3(\omega) &= OWA_\omega(r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}) \\
&= 0.36\times 1.0000 + 0.16\times 1.0000 + 0.16\times 0.8667 + 0.16\times 0.7195 + 0.16\times 0.6189 \\
&= 0.8728 \\
z_4(\omega) &= OWA_\omega(r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}, r_{45}) \\
&= 0.36\times 0.9904 + 0.16\times 0.9871 + 0.16\times 0.9024 + 0.16\times 0.8749 + 0.16\times 0.4643 \\
&= 0.8731
\end{aligned}$$

در نهایت، شرکتها را با توجه به مقدار $z_i(\omega)$ مرتب می‌کنیم، که به صورت زیر خواهد بود:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$$

که علامت $\succ$ در اینجا به معنای "برتری داشتن" است، بنابراین، شرکت x_4 را به عنوان بهترین شرکت انتخاب می کنیم، چون طرحهای توسعه‌اش بر بقیه شرکتها برتری دارد.

۲-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگرهای *OWA* و *CWA*

۱-۲-۱ عملگر هندسی وزن‌دار ترکیبی (*CWA*)

تعریف ۲-۱ (هارسانی، (۱۹۵۵)[1] ، ژوو و دا، (۲۰۰۳)[2]) فرض کنید تابع WA را بصورت $WA: \Re^n \to \Re$ تعریف کنیم. حال اگر داشته باشیم:

$$WA_w(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \alpha_j \qquad (۱-۸)$$

که در آن $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن مجموعه نشانوندهای $\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$ به ازای $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ باشد. آنگاه تابع WA را عملگر "میانگین وزن‌دار" یا عملگر WA می‌نامند.

گامهای اساسی عملگر WA بشرح زیر است:

- وزندهی تمامی نشانوندها با استفاده از بردار وزن نرمال‌شده
- تلفیق و تجمیع این نشانوندهای وزندار با استفاده از عمل جمع

---

[1] Harsanyi (1955)
[2] Xu and Da (2003b)

مثال ۳-۱ اگر $(7, 18, 6, 2)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد و بردار وزن آنها به صورت $w = (0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$ باشد، آنگاه:

$$WA_w(7,\ 18,\ 6,\ 2) = 0.4\times 7 + 0.1\times 18 + 0.2\times 6 + 0.3\times 2 = 6.4$$

دقت کنید که در این حالت، وزنها در مقادیر نشانوندهای مرتب نشده ضرب می‌شوند و نباید مثل عملگر OWA، ابتدا مقادیر نشانوندها بطور نزولی مرتب شوند.

تعریف ۳-۱ (ژوو، (۲۰۰۲)[1]) فرض کنید $CWA: R^n \to R$ است. حال اگر داشته باشیم:

$$CWA_{w,\omega}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j$$

که در آن $\omega = (\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n)$ بردار وزن عملگر CWA می‌باشد و $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ به ازای $\omega_j \in [0, 1]$ است، همچنین، b_j برابر j امین مقدار بزرگ در نشانوندهای وزندار $nw_i\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$ می‌باشد، $w = (w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)$ بردار وزن نشانوندهای $\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$، $w_i \in [0, 1]$، $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ و در نهایت n ضریب تعادل است. آنگاه، تابع CWA عملگر "میانگین وزن‌دار ترکیبی" یا عملگر CWA نامیده می‌شود.

مثال ٤-۱ اگر $\omega = (0.1, 0.4, 0.4, 0.1)$ بردار وزن عملگر CWA باشد و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (7, 18, 6, 2)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد که بردار وزنشان $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ است، آنگاه:

$$4w_1\alpha_1 = 5.6\,,\ 4w_2\alpha_2 = 21.6\,,\ 4w_3\alpha_3 = 2.4\,,\ 4w_4\alpha_4 = 3.2$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$b_1 = 21.6\,,\ b_2 = 5.6\,,\ b_3 = 3.2\,,\ b_4 = 2.4$$

---

[1] Xu (2002d)

بنابراین

$$CWA_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_4) = 0.1\times 21.6 + 0.4\times 5.6 + 0.4\times 3.2 + 0.1\times 2.4$$
$$= 5.92$$

قضیه ۱۲-۱ (ژوو، (۲۰۰۲)) عملگر WA حالت خاصی از عملگر CWA است.

اثبات اگر $\omega = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ باشد، آنگاه:

$$CWA_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n} w\alpha_j$$
$$= WA_w(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

قضیه ۱۳-۱ (ژوو، (۲۰۰۲)) عملگر OWA حالت خاصی از عملگر CWA است.

اثبات اگر $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ باشد، آنگاه $nw_i\alpha_i = \alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$. بنابراین، نسخه وزن‌دار بردار نشانوندها به صورت $nw_i\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$ یعنی همان خودش است. بنابراین:

$$CWA_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWA_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

از قضایای (۱-۱۲) و (۱-۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که عملگر CWA هر دو عملگر WA و OWA را تعمیم داده است. این عملگر نه تنها اهمیت هر نشانوند را در نظر می‌گیرد، بلکه اهمیت موقعیت ترتیبی آن را نیز مد نظر دارد.

۲-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

در شرایطی که پیچیدگی مسئله افزایش می‌یابد، معمولاً چند تصمیم‌گیرنده جهت بهبود امر تصمیم در فرایند تصمیم‌گیری شرکت کرده و نظر خود را بیان می‌کنند تا نتایج علمی و منطقی بدست آید. در ادامه، روش *MAGDM* را معرفی می‌کنیم که مبتنی بر عملگرهای *OWA* و *CWA* است (ژوو، (۲۰۰۲)[۱]).

گام ۱) فرض کنید X و U به ترتیب مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها باشند و اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها نیز کاملاً نامعلوم است. مجموعه $D=\{d_1, d_2, ..., d_t\}$ را مجموعه تصمیم‌گیرندگان در نظر می‌گیریم که بردار وزن آنها $\lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t\}$ است که در آن $k=1, 2, ..., t$، $\lambda_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k =1$ می‌باشد. تصمیم‌گیرنده d_k که $d_k \in D$ است، ترجیح خود را نسبت به گزینه $x_j \in X$ و با در نظر گرفتن شاخصه u_j که $u_j \in U$ است، بصورت $a_{ij}^{(k)}$ اعلام می‌کند. تمامی مقادیر شاخصه‌ها a_{ij}^k در ماتریس تصمیم A_k قرار دارند. اگر ابعاد شاخصه‌ها متفاوت باشند، باید مقادیر تمام شاخصه‌ها یعنی $a_{ij}^{(k)}$ را در ماتریس تصمیم A_k با استفاده از روابط (۱-۲) تا (۱-۷) نرمال کنیم، به عبارتی $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$.

گام ۲) با استفاده از عملگر *OWA* تمامی مقادیر شاخصه‌ها $r_{ij}^{(k)}(j=1, 2, ..., m)$ را در سطر iام ماتریس تجمیع کرده، سپس مقدار کلی را به ازاء هر شاخصه $z_i^{(k)}(\omega)$ برای گزینه x_i را متناسب با تصمیم‌گیرنده d_k بدست می‌آوریم.

$$z_i^{(k)}(\omega)=OWA_\omega(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)})$$
$$=\sum_{j=1}^{m} \omega_j b_{ij}^{(k)}\ ,\ \ i=1, 2, ..., n\ ;\ k=1, 2, ..., t$$

که در آن $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$، $\omega_j \geq 0$، $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$ و $b_{ij}^{(k)}$ عملاً j امین مقدار بزرگ از مقادیر $r_{il}^{(k)}$ است.

[1] Xu (2002d)

گام ۳) تمامی مقادیر $z_i^{(k)}(\omega)(k=1, 2, ..., t)$ را برای گزینه x_i با استفاده از عملگر CWA محاسبه کرده و مجموعه کلی مقادیر شاخصه‌های $z_i(\lambda, \omega')$ را بدست می‌آوریم:

$$z_i(\lambda, \omega') = CWA_{\lambda,\omega'}(z_i^{(1)}(\omega), z_i^{(2)}(\omega), ..., z_i^{(t)}(\omega))$$
$$= \sum_{k=1}^{t} \omega_k' b_i^{(k)} \quad , \quad i=1, 2, ..., n$$

که در آن $\omega' = (\omega_1', \omega_2', ..., \omega_t')$ بردار وزن عملگر CWA است و نیز $\omega_k' \geq 0$، $\sum_{k=1}^{t} \omega_k' = 1$ و $b_i^{(k)}$ نشاندهنده k امین بزرگترین عنصر در مجموعه نشانوندهای وزن‌دار $t\lambda_l z_i^{(l)}(\omega)(l=1, 2, ..., t)$ و t نیز ضریب تعادل است.

گام ٤) با توجه به مقادیر نهایی بدست آمده برای شاخصه‌های $z_i(\lambda, \omega')$ گزینه‌های موردنظر x_i را رتبه‌بندی کرده و بهترین آنها را برمی‌گزینیم.

روشی که در بالا به آن اشاره شد ابتدا از عملگر OWA برای تجمیع مقادیر همه شاخصه‌ها برای فقط یک گزینه (با در نظر گرفتن مقادیر اعلام شده برای همه شاخصه‌ها توسط فقط یک تصمیم‌گیرنده) استفاده می‌کند. سپس، از عملگر CWA جهت ترکیب داده‌های خبرگان مختلف برای آن گزینه بهره می‌گیرد. از آنجا که بعضاً در تصمیم‌گیری گروهی برخی از خبرگان ممکن است ترجیح خیلی بالا (دیدگاه افراطی) یا خیلی پایین (دیدگاه تفریطی) نسبت به گزینه خاصی ارائه دهند، عملگر CWA نه تنها می‌تواند نظر یکایک خبرگان را بازتاب دهد، بلکه اثر ترجیحات خیلی بالا یا خیلی پایین (نامعقول) آنها را نیز با اختصاص اوزان کوچک، کاهش داده و یا خنثی می‌کند. لذا، این عملگر نتایج تصمیم‌گیری را منطقی و قابل اتکا می‌کند.

۳-۲-۱ مثال کاربردی

مثال ۵-۱ مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن به دنبال ارزیابی تجهیزات مورد نیاز در صنعت هوافضا هستیم (چن و همکاران، (۲۰۰۳)[1]). در این مسئله با چهار نوع تجهیزات هوافضا مواجهیم که از آنان به

[1] Chen et al. (2003)

عنوان گزینه یاد می‌کنیم. شاخصه‌های ارزیابی از u_1تا u_8 نیز عبارتند از: (۱) امکان اخطار زود هنگام موشک، (۲) قابلیت کشف تصاویر، (۳) امکان پشتیبانی ارتباطات، (۴) قابلیت تجسس الکترونیکی، (۵) قابلیت نقشه ماهواره‌ای، (۶) امکان مسیریابی و موقعیت یابی، (۷) قابلیت پایش تفنگداران و (۸) قابلیت پیش‌بینی وضعیت آب‌وهوا. اوزان شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و چهار خبره در امر تصمیم‌گیری با بردار وزن $\lambda = (0.27, 0.23, 0.24, 0.26)$ دخالت دارند. این خبرگان تجهیزات $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., 8)$ ارزیابی کرده و سپس ماتریسهایی تصمیم $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{4\times 8}$ $(k=1, 2, 3, 4)$ را بدست می آورند، که اطلاعات آنها را در جداول (۱–۴) تا (۱–۷) ملاحظه می‌کنید. از آنجا که تمام شاخصه‌ها از جنس سود می‌باشند، نیازی به نرمال‌سازی داده‌ها نیست. در ادامه، از روش ارائه شده در قسمت (۱–۲–۲) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم.

جدول ٤-۱ ماتریس تصمیم R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	85	90	95	60	70	80	90	85
x_2	95	80	60	70	90	85	80	70
x_3	65	75	95	65	90	95	70	85
x_4	75	75	50	65	95	75	85	80

جدول ۵-۱ ماتریس تصمیم R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	90	65	70	95	70	75
x_2	85	60	60	65	90	75	95	70
x_3	60	65	75	80	90	95	90	80
x_4	65	60	60	70	90	85	70	65

جدول ٦-۱ ماتریس تصمیم R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	85	60	85	80	60	75
x_2	80	75	60	90	85	65	85	80
x_3	95	80	85	85	90	90	85	95
x_4	60	65	50	60	95	80	65	70

جدول ۷-۱ ماتریس تصمیم R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	70	80	85	65	80	90	70	80
x_2	85	70	70	80	95	70	85	85
x_3	90	85	80	80	95	85	80	90
x_4	65	70	60	65	90	85	70	75

گام ۱) با استفاده از عملگر OWA تجمیع مقادیر شاخصه‌ها را در i امین سطر ماتریس تصمیم برای هر خبره محاسبه می‌کنیم. در اینجا از روش ارائه شده در قضیه (۱-۱۰) برای تعیین بردار وزن عملگر OWA استفاده می‌کنیم. $\omega = (0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ و $\alpha = 2$ در نظر گرفته می‌شود. سپس، مقادیر کلی شاخصه‌ها $z_i^{(k)}(\omega)$ را برای هر خبره d_k بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
z_1^{(1)}(\omega) &= OWA_\omega(r_{11}^{(1)}, r_{12}^{(1)}, \ldots, r_{18}^{(1)}) \\
&= 0.3\times 95 + 0.1\times 90 + 0.1\times 90 + 0.1\times 85 + 0.1\times 85 \\
&\quad + 0.1\times 80 + 0.1\times 70 + 0.1\times 60 \\
&= 84.5
\end{aligned}
$$

به طور مشابه داریم:

$$z_2^{(1)}(\omega)=82,\ z_3^{(1)}(\omega)=83,\ \ z_4^{(1)}(\omega)=79$$
$$z_1^{(2)}(\omega)=79,\ z_2^{(2)}(\omega)=79,\ z_3^{(2)}(\omega)=82.5,\ z_4^{(2)}(\omega)=74.5$$
$$z_1^{(3)}(\omega)=75,\ z_2^{(3)}(\omega)=80,\ z_3^{(3)}(\omega)=89.5,\ z_4^{(3)}(\omega)=73.5$$
$$z_1^{(4)}(\omega)=80,\ z_3^{(4)}(\omega)=87.5,\ z_4^{(4)}(\omega)=76$$

گام ۲) مقادیر کلی شاخص‌ها $z_i^{(k)}(\omega)(k=1, 2, 3, 4)$ برای تجهیزات x_i به ازای هر تصمیم گیرنده d_k با استفاده از عملگر CWA را تلفیق می‌کنیم (فرض کنید بردار وزن برابر $\omega'=(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ است). برای انجام اینکار، ابتدا از λ، t و $z_i^{(k)}(\omega)$ برای بدست آوردن $t\lambda_k z_i^{(k)}(\omega)$ استفاده می‌کنیم:

$$4\lambda_1 z_1^{(1)}(\omega)=91.26,\ 4\lambda_1 z_2^{(1)}(\omega)=88.56,\ 4\lambda_1 z_3^{(1)}(\omega)=89.64$$
$$4\lambda_1 z_4^{(1)}(\omega)=85.32,\ 4\lambda_2 z_1^{(2)}(\omega)=72.68,\ 4\lambda_2 z_2^{(2)}(\omega)=72.68$$
$$4\lambda_2 z_3^{(2)}(\omega)=75.9,\ 4\lambda_2 z_4^{(2)}(\omega)=68.54,\ 4\lambda_3 z_1^{(3)}(\omega)=72$$
$$4\lambda_3 z_2^{(3)}(\omega)=76.8,\ 4\lambda_3 z_3^{(3)}(\omega)=85.92,\ 4\lambda_3 z_4^{(3)}(\omega)=70.56$$
$$4\lambda_4 z_1^{(4)}(\omega)=83.20,\ 4\lambda_4 z_2^{(4)}(\omega)=86.32,\ 4\lambda_4 z_3^{(4)}(\omega)=91$$
$$4\lambda_4 z_4^{(4)}(\omega)=79.56$$

بنابراین، مقدار کلی شاخصه تجهیزات x_i به شکل زیر خواهد بود:

$$z_1(\lambda,\ \omega')=\frac{1}{6}\times 91.26+\frac{1}{3}\times 83.20+\frac{1}{3}\times 72.68+\frac{1}{6}\times 72=79.17$$
$$z_2(\lambda,\ \omega')=\frac{1}{6}\times 88.56+\frac{1}{3}\times 86.32+\frac{1}{3}\times 76.8+\frac{1}{6}\times 72.68=79.87$$
$$z_3(\lambda,\ \omega')=\frac{1}{6}\times 91+\frac{1}{3}\times 89.64+\frac{1}{3}\times 85.92+\frac{1}{6}\times 75.90=86.34$$
$$z_4(\lambda,\ \omega')=\frac{1}{6}\times 85.32+\frac{1}{3}\times 79.56+\frac{1}{3}\times 70.56+\frac{1}{6}\times 68.54=75.68$$

گام ۳) رتبه‌بندی تجهیزات x_i براساس $z_1(\lambda,\ \omega')$ که در نهایت به شکل زیر خواهد بود:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$$

بنابراین، بهترین تجهیزات، تجهیزات شماره ۳ است.

۳-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *OWG*

۱-۳-۱ عملگر هندسی وزن‌دار ترتیبی (*OWG*)

تعریف ٤-۱ (هررا و همکاران، (۲۰۰۱)[1] و ژوو و دا، (۲۰۰۲)[2]) فرض کنید $OWG: \left(\Re^{+}\right)^{n} \rightarrow \Re^{+}$ باشد، حال اگر داشته باشیم:

$$OWG_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\omega_j} \qquad (۱-۹)$$

که در رابطه فوق، $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن نمائی در عملگر *OWG* است، $\omega_j \in [0, 1]$، $\sum_{j=1}^{n} \omega_i = 1$ و b_j برابر j امین مقدار بزرگ در مجموعه نشانوندهای $\alpha_i (i = 1, 2, ..., n)$ است، $\Re^{+}$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است، آنگاه تابع *OWG* را عملگر "هندسی وزن‌دار ترتیبی" یا عملگر *OWG* می‌نامند. عملگر *OWG* ویژگیهای مطلوبی دارد که شبیه به ویژگیهای عملگر *OWA* هستند. این ویژگیها عبارتند از: یکنوایی، جابجایی، خودتوانی و برخی دیگر از ویژگیها.

مثال ٦-۱ اگر $\omega = (0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$ بردار وزن عملگر *OWG* و نیز $(7, 18, 6, 2)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد، آنگاه:

$$OWG_{\omega}(7, 18, 6, 2) = 18^{0.4} \times 7^{0.1} \times 6^{0.2} \times 2^{0.3} = 6.8$$

۲-۳-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه به ارائه روش حل مسائل *MADM* مبتنی بر عملگر *OWG* خواهیم پرداخت (ژوو، (۲۰۰۲)[3]):

---

[1] Herrera et al. (2001)
[2] Xu and Da (2002b)
[3] Xu (2002d)

گام ۱) برای یک مسئله $MADM$ که اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و ماتریس تصمیم به شکل $(a_{ij} > 0)$ $A = (a_{ij})_{n\times m}$ است، از روابط (۱-۲) و (۱-۳) به منظور نرمال‌سازی ماتریس A و تبدیل آن به ماتریس نرمال $R = (r_{ij})_{n\times m}$ بهره می‌گیریم.

گام ۲) از عملگر OWG به منظور تلفیق و تجمیع تمامی مقادیر شاخصه‌های مربوط به گزینه x_i استفاده کرده و مقادیر کلی شاخصه‌ها را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$z_i(\omega) = OWG_{\omega}(r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{im}) = \prod_{j=1}^{m} b_{ij}^{\omega_j}$$

که در این رابطه $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ بردار وزن نمایی، $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ به ازای $\omega_j \in [0, 1]$ و b_{ij} معادل j امین مقدار بزرگ از مجموعه مقادیر $r_{il}\,(l = 1, 2, ..., m)$ است.

گام ۳) بهترین گزینه x_i را با توجه به مقادیر $z_i(\omega)$ را رتبه‌بندی و انتخاب می‌کنیم.

۱-۳-۳ مثال کاربردی

مثال ۷-۱ شاخصهایی که بطور معمول برای ارزیابی سرمایه‌گذاری روی پروژه‌های سیستمهای اطلاعاتی و انتخاب یک طرح سرمایه‌گذاری مناسب استفاده می‌شود به صورت زیر هستند (چن و لی، (۲۰۰۲)[1]):

- **درآمد (u_1):** همانطورکه در هر سرمایه‌گذاری هدف اصلی کسب سود است، در پروژه سرمایه‌گذاری بر روی سیستم اطلاعاتی نیز هدف همین است. بنابراین، درآمد باید به عنوان عامل اصلی ارزیابی پروژه سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. (واحد درآمد بشکل 10^4 دلار است)

[1] Chen and Li (2002)

- **ریسک (u_2):** ریسک سرمایه‌گذاری پروژه سیستم اطلاعاتی دومین عامل مهم و حیاتی است، خصوصاً پروژه‌های سیستم اطلاعاتی دولتی که شدیداً تحت تأثیر دولت و بازار هستند.

- **رفاه اجتماعی (u_3):** هدف از توسعه این سیستم اطلاعاتی افزایش سطح خدمات اجتماعی است. بنابراین، رفاه اجتماعی باید به عنوان یکی از شاخص‌های تأثیرگذار در ارزیابی پروژه‌های سرمایه‌گذاری سیستم اطلاعاتی در نظر گرفته شود. پروژه سرمایه‌گذاری که دارای کارایی بالا در راستای رفاه اجتماعی است نه‌تنها می‌تواند منجر به بهبود تصویر سازمان در جامعه می‌شود، بلکه شناخت و تأیید آن توسط دولت را نیز تسهیل می‌کند.

- **اثر بازار (u_4):** در دوره پیشرفت فناوری اطلاعات، سهم بازار مربوط به این صنعت بسیار قابل توجه است که معمولاً در دو جنبه تأثیر خود را نشان می‌دهند: (۱) سرعت فتح بازار: که در پروژه‌های مهندسی دولتی بسیار واضح است. اگر یک سازمان به طور موفقیت‌آمیزی نظر دولت را زودتر از بقیه جلب کند، قابلیت تصاحب سریع سهم بازار را نیز خواهد داشت. (۲) کاهش هزینه نهایی: تجمیع تجربه (تجربه طولانی و ذخیره شده) و اثر مقیاس (اندازه اقتصادی پروژه) دو عاملی هستند که می‌توانند به طور چشم‌گیری منجر به کاهش هزینه‌های توسعه آن تکنولوژی شوند. بنابراین، برخی از پروژه‌های سرمایه‌گذاری با اثر بازاری بالا می‌توانند در سود پایین یا حتی زیان نیز موفق شوند.

- **پیچیدگی فنی (u_5):** در فرآیند توسعه پروژه‌های سرمایه‌گذاری روی سیستم اطلاعاتی، تکنولوژی عاملی کلیدی است. با توسعه تکنولوژی کامپیوتر، صنایع بی‌وقفه به‌روز می‌شوند. از این رو، به منظور بهبود کارایی و امنیت سیستم، پیچیدگیهای فنی نیز با سرعت زیادی افزایش می‌یابند.

در میان شاخصهای ارزیابی که در بالا به آنها اشاره شد، u_2 و u_5 از جنس هزینه و مابقی آنها از نوع سود هستند. برای پروژه سیستم مدیریت اطلاعات در یک منطقه، چهار گزینه سرمایه‌گذاری (x_i) در اختیار هستند. (۱) x_1: سرمایه‌گذاری توسط شرکتی که از CPUهای هشت کیلوبایتی استفاده می‌کند، (۲) x_2:

سرمایه‌گذاری توسط شرکتی که از CPUهای دو کیلوبایتی استفاده می‌کند، (۳) x_3: سرمایه‌گذاری شرکت سومی که از کارتهای مغناطیسی استفاده می‌کند و (۴) x_4: سرمایه‌گذاری توسط دولت محلی که در این صورت شرکت مربوطه تنها قرارداد یکپارچگی سیستم را می‌بندد. خبرگان این چهار گزینه را ارزیابی کرده‌اند. نتایج ارزیابی آنها در جدول (۱–۸) قابل مشاهده است.

جدول ۸-۱ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	300	0.83	0.83	0.83	0.8
x_2	250	0.67	0.67	0.67	0.6
x_3	200	0.5	0.5	0.5	0.2
x_4	100	0.33	0.5	0.5	0.2

با این فرض که وزن شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, 3, 4, 5)$ کاملاً نامعلوم است، از روش معرفی شده در بخش (۱–۳–۲) جهت انتخاب بهترین گزینه استفاده می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از روابط (۱–۲) و (۱–۳) ماتریس تصمیم A را نرمال نموده و به ماتریس تصمیم نرمال $R=(r_{ij})_{4\times5}$ که در جدول (۱–۹) آمده، خواهیم رسید:

جدول ۹-۱ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	1.0000	0.3976	1.0000	1.0000	0.2500
x_2	0.8333	0.4925	0.8072	0.8072	0.3333
x_3	0.6667	0.6600	0.6024	0.6024	1.0000
x_4	0.3333	1.0000	0.6024	0.3976	1.0000

گام ۲) با استفاده از عملگر OWG تمام مقادیر مشخه‌های گزینه x_i را تجمیع می‌کنیم و سپس مقادیر کلی شاخصه‌ها $z_i(\omega)$ را محاسبه می‌کنیم. (بی‌آنکه به کلیت بحث خللی وارد شود، فرض کنید $\omega=(0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1)$ بردار وزن مرتبط با عملگر OWG باشد)

$$\begin{aligned} z_1(\omega) &= OWG_\omega(r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}) \\ &= 1.000^{0.10}\times 0.3976^{0.2}\times 1.0000^{0.4}\times 1.0000^{0.2}\times 0.2500^{0.1} \\ &= 0.7239 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2(\omega) &= OWG_\omega(r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}) \\ &= 0.8333^{0.10}\times 0.4925^{0.2}\times 0.8072^{0.4}\times 0.8072^{0.2}\times 0.3333^{0.1} \\ &= 0.6715 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3(\omega) &= OWG_\omega(r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}) \\ &= 0.6667^{0.10}\times 0.6600^{0.2}\times 0.6024^{0.4}\times 0.6024^{0.2}\times 1.0000^{0.1} \\ &= 0.6520 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4(\omega) &= OWG_\omega(r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}, r_{45}) \\ &= 0.3333^{0.10}\times 1.0000^{0.2}\times 0.6024^{0.4}\times 0.3976^{0.2}\times 1.0000^{0.1} \\ &= 0.6083 \end{aligned}$$

گام ۳) با توجه به مقادیر $z_i(\omega)$ محاسبه شده در گام قبل، رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ بصورت زیر خواهد شد:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$$

بنابراین، x_1 بهترین گزینه است.

۱-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *CWG*

۱-٤-۱ عملگر هندسی وزن‌دار (*CWG*)

تعریف ۱-۵ (آزل و آلسینا، (۱۹۸۷)[1]) فرض کنید $WG:\left(\Re^+\right)^n \to \Re^+$ باشد. حال اگر داشته باشیم:

$$WG_w(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j^{w_j} \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ بردار وزن نمائی نشانوندهای $\alpha_i(i=1, 2, ..., n)$ است و نیز $w_j \in [0, 1]$ و $\sum_{j=1}^{n} w_i = 1$ باشد، آنگاه تابع WG را عملگر "هندسی وزن‌دار" یا عملگر WG می‌نامند.

مثال ۱-۸ فرض کنید $(7, 18, 6, 2)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد که بردار وزن آنها به‌صورت $w=(0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$ است. بنابراین، داریم:

$$WG_w(7, 18, 6, 2) = 7^{0.4} \times 18^{0.1} \times 6^{0.2} \times 2^{0.3} = 5.123$$

تعریف ۱-٦ (ژوو، (۲۰۰۲)[2]) فرض کنید $CWG:\left(\Re^+\right)^n \to \Re^+$ باشد، حال اگر داشته باشیم:

$$CWG_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\omega_j}$$

جاییکه $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن نمایی عملگر CWG است، که در آن $\omega_j \in [0, 1]$، $\sum_{j=1}^{n} \omega_i = 1$ و b_j jامین مقدار بزرگ در مجموعه وزن نمائی نشانوندهای $\alpha_i^{nw_i}(i=1, 2, ..., n)$ است و نیز $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن نمائی نشانوندهای $\alpha_i(i=1, 2, ..., n)$ است و n ضریب تعادل است، آنگاه با این شرایط، تابع CWG را عملگر "هندسی وزن‌دار ترکیبی" یا عملگر CWG می‌نامیم.

---

[1] Aczél and Alsina (1987)
[2] Xu (2002d)

مثال ۹-۱ اگر $\omega = (0.1, 0.4, 0.4, 0.1)$ بردار وزن نمائی عملگر CWG باشد و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ مجموعه‌ای از نشانوندها باشد که بردار وزن نمائی‌شان به صورت $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ باشد، آنگاه:

$$\alpha_1^{4w_1} = 4.74 \, , \alpha_2^{4w_2} = 32.09 \, , \; \alpha_3^{4w_3} = 2.05 \, , \; \alpha_4^{4w_4} = 3.03$$

و لذا:

$$b_1 = 32.09 \, , \; b_2 = 4.74 \, , \; b_3 = 3.03 \, , \; b_4 = 2.05$$

نهایتاً:

$$CWG_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 32.09^{0.1} \times 4.74^{0.4} \times 3.03^{0.4} \times 2.05^{0.1} = 4.413$$

قضیه ۱۴-۱ عملگر WG یک مورد خاص از عملگر CWG است.

اثبات اگر $\omega = \left(\frac{1}{n} \, , \, \frac{1}{n} \, , \, ..., \, \frac{1}{n} \right)$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} CWG_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= \prod_{j=1}^{n} b_j^{\omega_j} = \left(\prod_{j=1}^{n} b_j \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{w_i} \\ &= WG_w(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \end{aligned}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۵-۱ عملگر OWG یک مورد خاص از عملگر CWG است.

اثبات فرض کنید $w = \left(\frac{1}{n} \, , \, \frac{1}{n} \, , \, ..., \, \frac{1}{n} \right)$ باشد، آنگاه $(i = 1, 2, ..., n)$ $\alpha_i^{nw_i} = \alpha_i$ می‌شود. یعنی نشانوندهای وزن‌دار نیز همان نشانوندهای اصلی هستند. بنابراین:

$$CWG_{w,\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = OWG_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

که اثبات کامل می‌شود.

از قضایای (۱-۱۴) و (۱-۱۵) می‌توان به این نتیجه رسید که عملگر CWG به هر دو عملگر WG و OWG عمومیت می‌بخشد. این عملگر نه‌تنها اهمیت هرکدام از نشانونده‌ها را در نظر می‌گیرد، بلکه اثر موقعیت ترتیبی آنها در نشانوند را نیز مد نظر قرار می‌دهد.

۱-٤-۲ روش تصمیم‌گیری

در این قسمت با استفاده از دو عملگر OWG و CWG روشی دیگر برای حل مسائل $MAGDM$ معرفی می‌کنیم.

گام ۱) برای یک مسئله $MADM$ که اطلاعات وزن شاخصه‌ها در آن کاملاً نامعلوم است، $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ را بردار وزن t تصمیم‌گیرنده در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda_k \in [0, 1]$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ است. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ گزینه‌های $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j \in U$ ارزیابی می‌کند و مقادیر $a_{ij}^{(k)} (> 0)$ را مشخص می‌کند.

تمام این مقادیر $a_{ij}^{(k)} (i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m)$ در ماتریس تصمیم A_k نمایش داده می‌شوند که بعد از آن نرمال می‌شوند و در ماتریس $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n \times m}$ قرار می‌گیرند.

گام ۲) از عملگر OWG به منظور تجمیع اطلاعات مقادیر شاخصه‌ها در i امین سطر از R_k استفاده کرده و مقادیر کلی مقادیر شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ را بدست می‌آوریم:

$$z_i^{(k)}(\omega) = OWG_{\omega}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) = \prod_{j=1}^{m} (b_{ij}^{(k)})^{\omega_j}$$

که در رابطه فوق $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$، بردار وزن نمائی عملگر OWG است. همچنین $\omega_j \in [0, 1]$ ، $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ و $b_{ij}^{(k)}$ jامین مقدار بزرگتر در مقادیر $r_{il}^{(k)} (l = 1, 2, ..., m)$ است.

گام ۳) تمامی مقادیر $z_i^{(k)}(\omega)(k=1, 2, ..., t)$ مربوط به هر تصمیم‌گیرنده $d_k(k=1, 2, ..., t)$ را با استفاده از عملگر CWG تجمیع کرده و مقدار تجمیعی کلی مقادیر شاخصه‌های $z_i(\lambda, \omega')$ را بدست آورید:

$$z_i(\lambda, \omega') = CWG_{\lambda,\omega'}(z_i^{(1)}(\omega), z_i^{(2)}(\omega), ..., z_i^{(t)}(\omega)) = \prod_{k=1}^{t} (b_i^{(k)})^{\omega'_k}$$

که در آن $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, ..., \omega'_t)$ بردار وزن نمائی مربوط به عملگر CWG است و $\omega'_k \in [0, 1]$، $\sum_{k=1}^{t} \omega'_k = 1$ و $b_i^{(k)}$، j امین مقدار بزرگ در نشانوندهای وزن‌دار نمائی $z_i^{(k)}(\omega)^{t\lambda_k}$ است و همچنین t ضریب تعادل می‌باشد.

گام ٤) با توجه به $z_i(\lambda, \omega')$ گزینه‌های x_i را رتبه‌بندی و انتخاب نمائید.

۳-٤-۱ مثال کاربردی

مثال ۱۰-۱ یک مسئله $MADM$ را در نظر بگیرید که در آن به دنبال ارزیابی مالی چند دانشگاه و رتبه‌بندی آنها هستیم. ابتدا، ده شاخص ارزیابی تعریف می‌شوند (تنگ و همکاران، (۲۰۰۰)[1]): (۱) u_1: عملکرد درآمد بودجه، (۲) u_2: عملکرد مخارج بودجه، (۳) u_3: کمک مالی از نهادهای بالادستی، (۴) u_4: تأمین مالی توسط خود دانشگاه، (۵) u_5: هزینه‌های پرسنلی، (۶) u_6: هزینه‌های عمومی، (۷) u_7: مخارج سرانه، (۸) استفاده از داراییهای ثابت، (۹) وضعیت اشتغال داراییهای فعلی و (۱۰) u_{10}: قابلیت پرداخت. اوزان مربوط به شاخصها کاملاً نامعلوم است. چهار فرد خبره $d_k(k=1, 2, 3, 4)$ وجود دارند که همسنگ نبوده بردار وزن آنها به صورت $\lambda = (0.27, 0.23, 0.24, 0.26)$ است. خبرگان مورد نظر ما، موقعیت مالی ۴ دانشگاه $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., 10)$ و با استفاده از سیستم صفر تا صد ارزیابی می‌کنند و سپس مقادیر شاخصه‌های لیست شده در

[1] Teng et al. (2000)

ماتریس $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{4\times10}(k=1, 2, 3, 4)$ را به دست می‌دهند که در جداول (۱-۱۰) تا (۱-۱۳) نشان داده شده‌اند و نیاز به نرمال‌سازی ندارند.

جدول ۱-۱۰ ماتریس تصمیم R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	90	95	60	70	90	85	95	65	85	90
x_2	80	90	75	80	85	90	75	80	70	95
x_3	70	75	90	95	80	90	70	80	85	85
x_4	90	80	85	70	95	85	95	75	75	90

جدول ۱-۱۱ ماتریس تصمیم R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	70	75	95	80	85	60	80	90	80	95
x_2	80	90	70	70	85	95	75	85	75	90
x_3	75	85	80	90	95	70	60	75	80	90
x_4	80	70	90	75	85	95	65	85	85	90

جدول ۱-۱۲ ماتریس تصمیم R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	70	80	85	70	95	85	65	90	75	95
x_2	85	70	65	95	85	90	70	85	75	85
x_3	90	80	80	85	95	95	60	80	85	80
x_4	65	75	95	75	90	85	65	75	90	80

جدول ۱۳-۱ ماتریس تصمیم R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	60	90	95	75	80	95	75	80	85	80
x_2	80	65	60	85	95	90	80	85	70	80
x_3	95	75	85	80	90	85	90	60	75	85
x_4	65	80	65	75	95	85	80	65	60	95

در ادامه، از روش معرفی شده در بخش (۱-۴-۲) جهت حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

گام ۱) از عملگر OWG به منظور تجمیع تمامی مقادیر شاخصه‌ها در iامین سطر از ماتریس R_k و بدست آوردن مقادیر شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای هر یک از گزینه‌های x_k مربوط به تصمیم‌گیرنده d_k استفاده می‌کنیم. در اینجا بردار وزن آن را بصورت زیر فرض کنید $\omega=(0.07, 0.08, 0.10, 0.12, 0.13, 0.12, 0.10, 0.08, 0.07)$.

لذا خواهیم داشت:

$$z_1^{(1)}(\omega)=95^{0.07}\times 95^{0.08}\times 90^{0.10}\times 90^{0.12}\times 90^{0.13}\times 85^{0.13}\times 85^{0.12}\times 70^{0.10}\times 65^{0.08}\times 60^{0.07}$$
$$=82.606$$

به طور مشابه:

$$z_2^{(1)}(\omega)=81.579,\ z_3^{(1)}(\omega)=81.772,\ z_4^{(1)}(\omega)=83.807,\ z_1^{(2)}(\omega)=80.607$$

$$z_2^{(2)}(\omega)=81.141,\ z_3^{(2)}(\omega)=79.640,\ z_4^{(2)}(\omega)=81.992,\ z_1^{(3)}(\omega)=80.513$$

$$z_2^{(3)}(\omega)=80.340,\ z_3^{(3)}(\omega)=82.649,\ z_4^{(3)}(\omega)=78.949,\ z_1^{(4)}(\omega)=81.053$$

$$z_2^{(4)}(\omega)=78.784,\ z_3^{(4)}(\omega)=81.985,\ z_4^{(4)}(\omega)=75.418$$

گام ۲) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای گزینه x_i مربوط به تصمیم‌گیرنده d_k را با استفاده از عملگر CWG (با بردار وزن $\omega' = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$) تجمیع کنید. بدین منظور، ابتدا از $\lambda,\ t$ و $z_i^{(k)}(\omega)$ برای بدست آوردن $\left(z_i^{(k)}(\omega)\right)^{4\lambda_k}$ بهره می‌گیریم:

$$\left(z_1^{(1)}(\omega)\right)^{4\lambda_1} = 117.591,\ \left(z_2^{(1)}(\omega)\right)^{4\lambda_1} = 116.012,\ \left(z_3^{(1)}(\omega)\right)^{4\lambda_1} = 116.309$$

$$\left(z_4^{(1)}(\omega)\right)^{4\lambda_1} = 119.438,\ \left(z_1^{(2)}(\omega)\right)^{4\lambda_2} = 56.737,\ \left(z_2^{(2)}(\omega)\right)^{4\lambda_2} = 57.082$$

$$\left(z_3^{(2)}(\omega)\right)^{4\lambda_2} = 56.110,\ \left(z_4^{(2)}(\omega)\right)^{4\lambda_2} = 57.633,\ \left(z_1^{(3)}(\omega)\right)^{4\lambda_3} = 67.551$$

$$\left(z_2^{(3)}(\omega)\right)^{4\lambda_3} = 67.412,\ \left(z_3^{(3)}(\omega)\right)^{4\lambda_3} = 69.270,\ \left(z_4^{(3)}(\omega)\right)^{4\lambda_3} = 66.291$$

$$\left(z_1^{(4)}(\omega)\right)^{4\lambda_4} = 96.632,\ \left(z_2^{(4)}(\omega)\right)^{4\lambda_4} = 93.820,\ \left(z_3^{(4)}(\omega)\right)^{4\lambda_4} = 97.788$$

$$\left(z_4^{(4)}(\omega)\right)^{4\lambda_4} = 89.655$$

سپس، مقادیر تجمیعی کلی شاخصه‌های $z_i(\lambda, \omega')$ برای هر گزینه x_i را بدست می‌آوریم:

$$z_1(\lambda, \omega') = 117.591^{\frac{1}{6}} \times 96.632^{\frac{1}{3}} \times 67.551^{\frac{1}{3}} \times 56.737^{\frac{1}{6}} = 81.088$$

$$z_2(\lambda, \omega') = 116.012^{\frac{1}{6}} \times 93.820^{\frac{1}{3}} \times 67.412^{\frac{1}{3}} \times 57.082^{\frac{1}{6}} = 80.139$$

$$z_3(\lambda, \omega') = 116.309^{\frac{1}{6}} \times 97.788^{\frac{1}{3}} \times 69.270^{\frac{1}{3}} \times 56.110^{\frac{1}{6}} = 81.794$$

$$z_4(\lambda, \omega') = 119.438^{\frac{1}{6}} \times 89.655^{\frac{1}{3}} \times 66.291^{\frac{1}{3}} \times 57.633^{\frac{1}{6}} = 79.003$$

گام ۳) با توجه به $z_i(\lambda, \omega')$، رتبه‌بندی تمام گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ را به صورت ذیل انجام دهید:

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$$

که x_3 بهترین گزینه است.

۱-۵ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر بیشترین انحرافات

۱-۵-۱ روش تصمیم‌گیری

برای یک مسئله *MADM* که اطلاعات وزن شاخصه‌ها در آن کاملاً نامعلوم است، ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ ابتدا با استفاده از روابط ارائه شده در بخش (۱-۱-۲) به ماتریس نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ تبدیل می‌شوند.

فرض کنید $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ بردار وزن شاخصه‌ها است که در آن $w_j \geq 0$ بوده و شرط زیر را ارضاء می‌کند (ونگ، (۱۹۹۸)[1]):

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^2 = 1 \tag{۱-۱۱}$$

سپس، می‌توانیم مقادیر کلیه شاخصه‌ها برای هر گزینه را از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$z_i(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j \tag{۱-۱۲}$$

در فرآیند *MADM*، به طور کلی باید مقادیر کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه را با یکدیگر مقایسه کنیم. طبق تئوری اطلاعات[2]، اگر تمام گزینه‌ها دارای مقادیر شاخصه یکسان باشند، باید یک وزن کوچکی به شاخصه‌ها تخصیص داده شود. این کار به این دلیل است که وضعیت موجود شاخصه‌ها کمکی به تمایز در گزینه‌ها نمی‌کنند (زلنی، (۱۹۸۲)[3]). در نتیجه، از دیدگاه رتبه‌بندی گزینه‌ها، شاخصه‌ای که انحرافات بیشتری در میان گزینه‌ها دارد، باید وزن بیشتری داشته باشد. اگر هیچ اختلافی میان مقادیر شاخصه‌های تمام گزینه‌ها برحسب u_j وجود نداشته باشد، یعنی این شاخصه هیچ نقشی در رتبه‌بندی گزینه‌ها بازی

[1] Wang (1998)
[2] Information Theory
[3] Zeleny (1982)

نخواهد کرد و به تبع آن وزن آن می‌تواند صفر در نظر گرفته شود (ونگ، (۱۹۹۸)). برای شاخصه u_j، از $D_{ij}(w)$ برای نشان دادن انحرافات بین گزینه x_i و سایر گزینه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$D_{ij}(w) = \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} w_j - r_{kj} w_j \right|$$

فرض کنید

$$D_j(w) = \sum_{i=1}^{n} D_{ij}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| w_j$$

آنگاه $D_j(w)$ نشان‌دهنده انحراف کلی میان گزینه‌ها با توجه به شاخصه u_j است.

بر مبنای تحلیل فوق، بردار وزن w باید به منظور بیشینه‌سازی انحراف کلی میان گزینه‌ها با در نظر گرفتن تمام شاخصه‌ها بدست آید. در نتیجه تابع هدف زیر را می‌سازیم:

$$\max\ D(w) = \sum_{j=1}^{m} D_j(w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| w_j$$

سپس، از مدل بهینه‌سازی زیر برای بدست آوردن مقادیر بردار وزن w استفاده می‌کنیم (ونگ، (۱۹۹۸)):

$$\textbf{(M-1.1)} \quad \begin{cases} \max\ D(w) = \sum_{j=1}^{m} D_j(w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| w_j \\ s.t. \qquad w_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, m,\ \sum_{j=1}^{m} w_j^2 = 1 \end{cases}$$

برای حل مدل فوق، تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L(w, \zeta) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| w_j + \frac{1}{2} \zeta \left(\sum_{j=1}^{m} w_j^2 - 1 \right)$$

که در آن ζ ضریب لاگرانژ است.

با مشتق‌گیری از $L(w, \zeta)$ نسبت به $w_j (j=1, 2, ..., m)$ و ζ و برابر صفر قرار دادن این مشتقات جزئی[1]، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{L(w, \zeta)}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| + \zeta w_j = 0, \quad j=1, 2, ..., m \\ \dfrac{L(w, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m} w_j^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

که از این معادلات جواب بهینه را می‌یابیم:

$$w_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right| \right]^2}}, \; j=1, 2, ..., m$$

از آنجائیکه بردار وزن، بطور سنتی، محدودیت نرمال‌شدگی را ارضا می‌کند، لازم است به منظور همراه شدن با این عادت مردم، w_j^* را بشکل زیر نرمال کنیم:

$$w_j = \frac{w_j^*}{\sum_{j=1}^{m} w_j^*}, \; j=1, 2, ..., m$$

که از آن خواهیم داشت:

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right|}{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| r_{ij} - r_{kj} \right|}, \; j=1, 2, ..., m \qquad (۱-۱۳)$$

طبق تحلیلهای فوق، روش *MADM* مبتنی بر بیشترین انحرافات[2] به صورت زیر خلاصه می‌شود:

---

[1] Partial Derivatives
[2] Maximizing Deviations-Based Method

گام ۱) برای یک مسئله $MADM$، ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ ساخته شده و سپس به فرم نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ تبدیل شود.

گام ۲) از معادله (۱-۱۳) برای محاسبه بردار وزن بهینه w استفاده نمائید.

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ را برای هر گزینه با استفاده از معادلات (۱-۱۲) محاسبه کنید.

گام ٤) گزینه‌های x_i را با استفاده از $z_i(w)$ رتبه‌بندی و بهترین گزینه را انتخاب کنید.

۱-۵-۲ مثال کاربردی

مثال ۱-۱۱ یک واحد نظامی قصد خرید یک هواپیمای آموزشی دارد. ده نوع هواپیمای آموزشی وجود دارد، که بدین شرحند: (۱) x_1: *L-39*، (۲) x_2: *MB339*، (۳) x_3: *T-46*، (۴) x_4: *Hawk*، (۵) x_5: *C101*، (۶) x_6: *S211*، (۷) x_7: *Alpha jet*، (۸) x_8: *Fighter-teaching*، (۹) x_9: *Early-teaching* و (۱۰) x_{10}: *T-4*. شاخصه‌هایی که برای ارزیابی گزینه‌ها به کار رفته‌اند عبارتند از: (۱) u_1: دامنه اضافه بار (*g*)، (۲) u_2: حداکثر ارتفاع مجاز پروازی (*km*)، (۳) u_3: بیشترین سرعت پروازی در سطح (*km/h*)، (۴) u_4: سرعت فرود (*km/h*)، (۵) u_5: بیشترین سرعت اوج‌گیری (*m/s*) و (۶) u_6: مدت زمان گشت‌زنی (*h*). عملکرد هواپیماهای آموزشی در جدول (۱-۱۴) لیست شده است.

جدول ۱-۱٤ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	12	11.5	780	175	22	2.43
x_2	12	14.6	898	165	33.5	2.83
x_3	10.3	13.5	741	181	22.7	3

x_4	12	15.24	1938	204	47.3	4
x_5	11.4	12.19	833.4	180	19	5.9
x_6	9	12.8	667	170	19.8	3.8
x_7	12.2	13.37	991	170	59	3.3
x_8	12	14.3	1048	230	37.2	1.9
x_9	9	6.25	287	105	5	3.6
x_{10}	10.33	15	927	167	52.6	3.14

در ارزیابی شاخصه‌ها که در بالا انجام گرفته، u_4 (سرعت فرود) از نوع هزینه است و بقیه از نوع سود هستند (یعنی معیار چهارم از نوع کمتر–بهتر است و سایر معیارها از نوع بیشتر–بهتر هستند).

در ادامه، از روش معرفی شده در بخش (۱–۵–۱) برای حصول نتایج تصمیم استفاده می‌کنیم.

گام ۱) از معادلات (۱–۲) و (۱–۳) بمنظور نرمالسازی ماتریس A استفاده می‌کنیم. سپس ماتریس R را بدست می‌آوریم که در جدول (۱–۱۵) قابل مشاهده است.

جدول ۱–۱۵ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.984	0.755	0.744	0.600	0.373	0.412
x_2	0.984	0.958	0.857	0.636	0.568	0.480
x_3	0.844	0.886	0.707	0.580	0.385	0.508
x_4	0.984	1	0.990	0.515	0.802	0.678

x_5	0.934	0.800	0.795	0.683	0.322	1
x_6	0.738	0.840	0.636	0.618	0.336	0.644
x_7	1	0.877	0.946	0.618	1	0.559
x_8	0.984	0.938	1	0.457	0.631	0.322
x_9	0.738	0.410	0.274	1	0.085	0.610
x_{10}	0.847	0.984	0.885	0.629	0.892	0.532

گام ۲) بردار وزن بهینه را با استفاده از معادله (۱−۱۳) محاسبه می‌کنیم:

$$w = (0.0950, 0.1464, 0.1956, 0.1114, 0.2849, 0.1667)$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخص‌های $z_i(w)$ را برای هر گزینه x_i از رابطه (۱−۱۲) بدست می‌آوریم:

$$z_1(w) = 0.5913\,,\ z_2(w) = 0.7410\,,\ z_3(w) = 0.6071\,,\ z_4(w) = 0.8323$$
$$z_5(w) = 0.6847\,,\ z_6(w) = 0.5894\,,\ z_7(w) = 0.8553\,,\ z_8(w) = 0.7107$$
$$z_9(w) = 0.4210\,,\ z_{10}(w) = 0.8105$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر مبنای مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_{10} \succ x_7 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_8 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_6 \succ x_9$$

بنابراین، بهترین هواپیمای آموزشی مدل *T-4* است.

۶-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر آنتروپی اطلاعات

۱-۶-۱ روش تصمیم‌گیری

مفهوم آنتروپی یا بی‌نظمی از علم ترمودینامیک نشأت گرفته است. در ابتدا، برای توصیف پدیده برگشت‌ناپذیر[۱] در فرآیندهای حرکتی به کار می‌رفت. بعدها از آنتروپی در تئوری اطلاعات، برای به تصویر کشیدن عدم قطعیت[۲] در حوزه‌های مختلف استفاده شد. در ادامه، روش $MADM$ مبتنی بر بی‌نظمی اطلاعات را معرفی می‌کنیم:

گام ۱) برای حل مسئله $MADM$ موردنظر، ابتدا ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ را با استفاده از روابط موجود در بخش (۱-۱-۲) نرمال نموده و به ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ تبدیل می‌کنیم.

گام ۲) ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ با استفاده از معادله زیر به ماتریس $\dot{R}=(\dot{r}_{ij})_{n\times m}$ تبدیل می‌شود.

$$\dot{r}_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}}\,,\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m \qquad (۱-۱۴)$$

گام ۳) آنتروپی اطلاعاتی مربوط به شاخصه u_j از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E_j=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}\dot{r}_{ij}\ln\dot{r}_{ij},\ j=1,2,\dots,m \qquad (۱-۱۵)$$

در شرایط خاصی که $\dot{r}_{ij}=0$ باشد، آنگاه $\dot{r}_{ij}\ln\dot{r}_{ij}=0$.

گام ٤) بردار وزن $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ شاخصه‌ها را از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

---

[1] Irreversible Phenomenon
[2] Uncertainty

$$w_j = -\frac{1-E_j}{\sum_{k=1}^{m}(1-E_k)} \qquad (۱-۱۶)$$

گام ۵) از معادله (۱-۱۲) برای حصول مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i استفاده می‌کنیم.

گام ٦) گزینه‌های x_i را بر طبق مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم.

۲-٦-۱ مثال کاربردی

مثال ۱۲-۱ مسئله خرید یک جنگنده را در نظر بگیرید. فرض کنید چهار نوع مختلف جنگنده وجود دارد که از میان آنها باید یکی را انتخاب کنیم. طبق عملکرد و هزینه هر جنگنده، تصمیم‌گیرنده از شش شاخص برای ارزیابی جنگنده‌ها استفاده می‌کند (ژوو، (۱۹۹۲)[۱]):

(۱) u_1: بیشترین سرعت (Ma)، (۲) u_2: برد پرواز $(10^3\,km)$، (۳) u_3: حداکثر بار (10^4پوند که هر پوند معادل $0.45359237kg$ است). (۴) u_4: هزینه خرید $(10^6\,\$)$، (۵) u_5:قابلیت اطمینان (سیستم ده نقطه‌ای)، (۶) u_6: حساسیت (سیستم ده نقطه‌ای). عملکرد تمام جنگنده‌ها در جدول زیر قابل مشاهده است:

جدول ١٦-١ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	2.0	1.5	2.0	5.5	5	9
x_2	2.5	2.7	1.8	6.5	3	5
x_3	1.8	2.0	2.1	4.5	7	7
x_4	2.2	1.8	2.0	5.0	5	5

[1] Xu (1992)

در شاخصهای بالا، u_4 از نوع هزینه (یعنی کمتر، بهتر) و بقیه شاخص‌ها از نوع سود (یعنی بیشتر، بهتر) هستند. اکنون از روش ارائه شده در بخش (۱-۶-۱) به منظور یافتن بهترین جنگنده استفاده می‌کنیم که به گامهای زیر برای انجام این کار نیاز است:

گام ۱) از معادلات (۱-۱۲) و (۱-۱۳) به منظور نرمال‌سازی ماتریس A و تبدیل آن به ماتریس R استفاده می‌کنیم که ماتریس R در جدول (۱-۱۷) قابل مشاهده است:

جدول ۱-۱۷ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.800	0.556	0.952	0.818	0.714	1.000
x_2	1.000	1.000	0.857	0.692	0.429	0.556
x_3	0.720	0.741	1.000	1.000	1.000	0.778
x_4	0.880	0.667	0.952	0.900	0.714	0.556

گام ۲) به دست آوردن ماتریس زیر با استفاده از رابطه (۱-۱۴):

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} 0.235 & 0.188 & 0.253 & 0.240 & 0.250 & 0.346 \\ 0.294 & 0.337 & 0.228 & 0.203 & 0.150 & 0.192 \\ 0.212 & 0.250 & 0.266 & 0.293 & 0.350 & 0.269 \\ 0.259 & 0.225 & 0.253 & 0.264 & 0.250 & 0.192 \end{bmatrix}$$

گام ۳) بی‌نظمی یا آنتروپی اطلاعات مربوط به هر شاخصه u_j را با استفاده از رابطه (۱-۱۵) محاسبه می‌کنیم:

$$E_1 = 0.9947\,,\ E_2 = 0.9832\,,\ E_3 = 0.9989$$
$$E_4 = 0.9936\,,\ E_5 = 0.9703\,,\ E_6 = 0.9768$$

گام ٤) بردار وزن شاخصه‌ها از معادله (۱-۱۶) را استخراج می‌کنیم:

$$w = (0.0642,\ 0.2036,\ 0.0133,\ 0.0776,\ 0.3600,\ 0.2812)$$

گام ۵) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای هر گزینه x_j را با استفاده از معادله (۱-۱۲) بدست می‌آوریم:

$$z_1(w) = 0.7789\,,\ \ z_2(w) = 0.6437\,,\ \ z_3(w) = 0.8668\,,\ \ z_4(w) = 0.6882$$

گام ٦) گزینه‌های x_i را بر مبنای مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی و بهترین گزینه را انتخاب می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$$

که بهترین انتخاب گزینه x_3 است.

۱-۷ تصمیم‌گیری چندشاخصه با وجود اطلاعات ترجیحی گزینه‌ها[1]

پیچیدگی و عدم قطعیت پدیده‌ها و شرکت فعال تصمیم‌گیرندگان در فرایند تصمیم، منجر به نوعی از مسائل *MADM* براساس اطلاعات ترجیحی روی گزینه‌ها شد که توجه بسیاری از محققان به آن جلب شده است. در این بخش، سه روش برای حل مسائل *MADM* را معرفی می‌کنیم که در آنها تصمیم‌گیرندگان بر روی گزینه‌ها ترجیحاتی دارند.

۱-۷-۱ پیش‌زمینه

رابطه ترجیحی[2] یکی از رایجترین شیوه‌های نمایش اطلاعات در برخورد با مسائل تصمیم‌گیری است. رابطه ترجیحی چندگانه[3] یکی از پرکاربردترین نوع رابطه ترجیحی است که اولین بار توسط ساعتی[4] در سال (۱۹۸۰) ارائه شد.

---

[1] MADM Method with Preference Information On Alternatives
[2] Preference Relation
[3] Multiplicative Preference Relation
[4] Saaty (1980)

تعریف ۷-۱ (ساعتی، (۱۹۸۰)) یک رابطه ترجیحی چندگانه H روی مجموعه X به صورت ماتریس متقابل $H=(h_{ij})_{n\times m}\in X\times X$ تحت قیود زیر تعریف می‌شود:

$$h_{ij}h_{ji}=1\,,\;\; h_{ii}=1\,,\;\; h_{ij}>0\,,\;\; i,\; j=1, 2, ..., n$$

که در آن h_{ij} نشان‌دهنده شدت ترجیحِ[1] گزینه x_i نسبت به x_j است. به طور خاص، $h_{ij}=1$ نشان‌دهنده بی‌تفاوتی بین گزینه‌های x_i و x_j است. $h_{ij}>1$ نشان‌دهنده ترجیح بیشتر گزینه x_i بر x_j است. مقادیر بیشتر از یک h_{ij} نشان‌دهنده ترجیح قوی‌تر x_i نسبت به x_j است. $h_{ij}<1$ به معنی ترجیح بیشتر x_j نسبت به x_i است. هرچه مقدار h_{ij} کمتر باشد، شدت ترجیح x_j نسبت به x_i بیشتر است.

جدول ۱۸-۱ چهار نوع مقیاس متقابل

مقیاس ۱/۹	مقیاس نمایی	مقیاس ۱۰/۱۰ - ۲/۱۸	مقیاس ۹/۹ - ۱/۹	مفهوم مقیاس
1	a^0	10/10	9/9	iامین و jامین گزینه به یک نسبت برای هدف مهم هستند.
3	a^2	12/8	9/7	تجربه و قضاوت به مقدار اندکی باعث ترجیح گزینه i بر j است.
5	a^4	14/6	9/5	تجربه و قضاوت آشکارا به نفع iامین گزینه است.
7	a^6	16/4	9/3	گزینه i نسبت به گزینه j قویا ترجیح داده می‌شود و غلبه این گزینه در عمل قابل مشاهده است.
9	a^8	18/2	9/1	شواهد حمایت‌کننده از گزینه‌ی iام نسبت به jام بالاترین درجه تأیید را دارند.

[1] Preference Intensity

تاکنون، تحقیقات گسترده‌ای در زمینه تئوری و کاربرد رابطه ترجیحی چندگانه انجام شده است. خوانندگان علاقمند می‌توانند به این منابع[1] جهت اطلاع بیشتر رجوع کنند.

جدول (۱–۱۸)، چهار نوع مقیاس متقابل[2] را نشان می‌دهد (ژوو، (۱۹۹۹)[3]). از آنجا که تمام روابط ترجیحی که با استفاده از این چهار نوع مقیاس متقابل ساخته شده‌اند، تعریف (۱–۷) را برآورده می‌کنند، پس همه آنها روابط ترجیحی چندگانه می‌باشند.

دو نکته مهم قابل ذکرند. اول اینکه مقادیر ۲، ۴، ۶ و ۸ نشان‌دهنده مقادیر میانی بین دو قضاوت در مقیاس ۱ تا ۹ هستند. دوم آنکه اگر گزینه i در مقایسه با گزینه j یکی از اعداد بالا را داشته باشد، آنگاه متقابلا گزینه j در مقایسه با گزینه i دارای مقدار مقابل و معکوس است، یعنی $h_{ji}=1/h_{ij}$.

تعریف ۸-۱ یک رابطه ترجیحی فازی[4] B روی مجموعه X توسط یک ماتریس مکمل $B=(b_{ij})_{n\times n}\subset X\times X$ نشان داده می‌شود که در آن $b_{ij}+b_{ji}=1$، $b_{ii}=0.5$، $b_{ij}>0$ است و نیز b_{ij} نشان‌دهنده درجه ترجیح[5] گزینه x_i بر x_j است. در حالت خاص، $b_{ij}=0.5$ نشان‌دهنده بی‌تفاوتی بین دو گزینه است. $b_{ij}>0.5$ نشان‌دهنده ترجیح گزینه x_i بر x_j است و هرچقدر بیشتر باشد، میزان ترجیح نیز بیشتر خواهد بود. $b_{ij}<0.5$ به معنی ترجیح بیشتر گزینه x_j بر x_i است و هرچقدر کمتر شود نشان‌دهنده ترجیح بیشتر گزینه j ام نسبت به گزینه i ام است. اخیراً تحقیقات زیادی در زمینه روابط ترجیحی فازی انجام شده است که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به این منابع[6] رجوع کنید.

---

[1] (Duckstein and Zionts (1992); Golden et al. (1989); Herrera et al. (2001); Saaty (1980), (1986), (1990), (1994), (1995), 1996), (2001), (2003); Saaty and exander (1981), (1989); Saaty and Hu (1998); Saaty and Kearns (1985); Saaty and Vargas (1982), (1984), (1994); Wang and Xu (1989); Wang (1995); Xu (1998), (1999), (2000a), (2000b), (2000c), (2007a), (2012a); Xu and Cai (2012a); Xu and Wei (1999), (2000); Zahedi (1986)).

[2] Reciprocal Scale

[3] Xu (1999)

[4] Fuzzy Preference Relation

[5] Preference Degree

[6] (Chiclana et al. (1998), (2001), (2003); Fernandez and Leyva (2004); Genc et al. (2010); Herrera-Viedma et al. (2004; Kacprzyk (1986); Lipovetsky and Michael Conklin (2002); Nurmi (1981); Orlovsky (1978); Roubens (1989), (1996); Tanino (1984); Xia and Xu (2011); Xu (1999), (2004d), (2004e), (2004h), (2011b), (2012b), Xu and Cai (2012c); Xu and Chen (2008))

جدول ۱۹-۱ سه نوع مقیاس مکمل

مقیاس ۰ تا ۱	پنج مقایس ۰٫۱ تا ۰٫۹	نه مقیاس ۰٫۱ تا ۰٫۹	مفهوم
0	0.1	0.1	حمایت شواهد از iامین گزینه نسبت به jامین گزینه در بالاترین مرتبه ممکن است.
		0.138	از iامین گزینه نسبت به گزینه jام قویا حمایت می شود.
	0.3	0.325	تجربه و قضاوت به طور آشکاری از گزینه jام نسبت به گزینه iام حمایت می‌کنند.
		0.439	تجربه و قضاوت به مقدار اندکی از گزینه jام نسبت به گزینه iام حمایت می‌کنند.
0.5	0.5	0.5	iامین و jامین گزینه به میزان یکسانی برای هدف مسئله دارای اهمیت هستند.
		0.561	تجربه و قضاوت به میزان اندکی از گزینه iام نسبت به گزینه jام حمایت می‌کنند.
	0.7	0.675	تجربه و قضاوت به طور آشکاری از گزینه iام نسبت به گزینه jام حمایت می‌کنند.
		0.862	غلبه گزینه iام بر jام بسیار بالا است. (حمایت قوی از گزینه i)
1	0.9	0.9	حمایت شواهد از گزینه iام نسبت به گزینه jام در بالاترین مرتبه ممکن قرار دارد.

جدول (۱–۱۹) سه نوع مقیاس مکمل[1] را نشان می‌دهد (ژوو، (۱۹۹۹)). از آنجا که تمامی روابط ترجیحی که با استفاده از این سه نوع مقیاس مکمل ساخته شده‌اند، تعریف (۱–۸) را ارضاء می‌کنند، پس می‌توان تمامی آنها را روابط ترجیحی فازی دانست.

مجددا دو نکته قابل ذکر است: اولا مقادیر *0.2*، *0.4*، *0.6* و *0.8* نشان‌دهنده روابط میانی بین دو قضاوت در مقیاس *0.1-0.9* است. ثانیاً، اگر گزینه i ام یکی از مقادیر فوق را در مقایسه با گزینه j ام گرفت، آنگاه گزینه j ام در مقایسه با گزینه i ام دارای مقدار مکمل می‌شود. یعنی $b_{ji} = 1 - b_{ij}$.

۲-۷-۱ روش تصمیم‌گیری

(۱) موقعیتی که در آن اطلاعات ترجیحی گزینه‌ها از نوع رابطه ترجیحی چندگانه است[2]

در یک مسئله *MADM*، ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times m}\ (a_{ij} > 0)$ را در نظر می‌گیریم. در حالت کلی، شاخصه‌هایی از جنس هزینه و سود وجود دارند. به منظور سنجش تمامی مقادیر شاخصه‌ها در یکای بی‌مقیاس و تسهیل مقایسات میان–شاخصی، از روابط (۱–۲) و (۱–۳) برای نرمال‌سازی یک از عناصر a_{ij} در ماتریس A و تبدیل آنها به عناصر متناظر در ماتریس $R = (r_{ij})_{n\times m}$ استفاده می‌کنیم. مقادیر کلی شاخصه‌ها $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i را می‌توان از روابط (۱–۱۲) بدست آورد.

فرض کنید که تصمیم‌گیرنده از "مقیاس متقابل" برای مقایسه هر جفت از گزینه‌های $x_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ استفاده می‌کند و سپس رابطه ترجیحی چندگانه $H = (h_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهد. به منظور یکسان‌سازی اطلاعات تصمیم از تابع تبدیل زیر برای برای تبدیل مقادیر کلی شاخصه‌ها $z_i(w)$ به ازای هر گزینه به رابطه ترجیحی $\bar{H} = (\bar{h}_{ij})_{n\times n}$ استفاده می‌کنیم.

---

[1] Complementary Scale
[2] Xu (2006b)

$$\bar{h}_{ij}=\frac{z_i(w)}{z_j(w)}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k}\ ,\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۱-۱۷)$$

اگر $H=\bar{H}$ یعنی داشته باشیم $h_{ij}=\bar{h}_{ij}$ به ازای تمامی مقادیر i و j، آنگاه:

$$h_{ij}=\frac{z_i(w)}{z_j(w)}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k}\ ,\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۱-۱۸)$$

$$h_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k\ \ ,\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۱-۱۹)$$

در این مورد، می‌توانیم از روشهای اولویت‌بندی مرتبط با روابط ترجیحی چندگانه جهت حصول بردار اولویت H استفاده کرده و به ازاء هرکدام، گزینه‌های مورد نظر را رتبه‌بندی و انتخاب نمائیم.[۱]

در عین حال، عموماً تفاوت بین روابط ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ و $\bar{H}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$وجود دارد، به عبارتی معادله (۱-۱۹) در این شرایط صدق نمی‌کند. از این‌رو، تابع مشتق خطی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$f_{ij}(w)=h_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k-\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k=\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})w_k i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۱-۲۰)$$

بدیهی است که برای دست‌یابی به یک بردار وزن w معقول از شاخصه‌ها، مقادیر مشتقات فوق باید در کمترین حالت ممکن باشند. بنابراین، مدل بهینه‌سازی زیر را تشکیل می‌دهیم:

---

[1] (Blankmeyer (1987); Cogger and Yu (1985); Crawford and Williams (1985); Genst and Lapointe (1993); Harker and Vargas (1987); Jensen (1984); Wang (1995); Xu (2000a); Xu and Wei (2000); Xu and Cai (2012a)).

$$\textbf{(M-1.2)}\quad \begin{cases} \min\ F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{2}(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})w_k\right]^2 \\ s.t.\quad w_j\ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,m,\quad \sum_{j=1}^{m} w_j=1 \end{cases}$$

برای حل مدل بهینه‌سازی فوق، تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L(w,\zeta)=F(w)+2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m} w_j-1\right)$$

که در این تابع ζ همان ضریب لاگرانژ است.

با مشتق‌گیری از تابع $L(w,\zeta)$ نسبت به $w_l(l=1,2,\ldots,m)$ و متحد صفر قرار دادن آن، $\frac{\partial L(w,\zeta)}{\partial w_l}=0$ معادلات زیر استخراج می‌شوند:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}2(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})w_k\right](h_{ij}r_{jl}-r_{il})+2\zeta=0,\ l=1,2,\ldots,m \qquad (۱-۲۱)$$

یعنی

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})(h_{ij}r_{jl}-r_{il})\right]w_k+\zeta=0,\ l=1,2,\ldots,m \qquad (۱-۲۲)$$

و اگر $e_m=(1,1,\ldots,1)$ و $Q=(q_{kl})_{m\times m}$ باشد، آنگاه:

$$q_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})(h_{ij}r_{jl}-r_{il}),\ l,\ k=1,2,\ldots,m \qquad (۱-۲۳)$$

سپس، معادله (۱-۲۲) می‌تواند به فرم ماتریسی زیر تبدیل شود:

$$Qw^T=-\zeta e_m^T \qquad (۱-۲۴)$$

و همچنین با تبدیل $\sum_{j=1}^{m} w_j=1$ به فرم برداری، آنگاه:

$$e_m w^T = 1 \tag{۱-۲۵}$$

که در رابطه فوق T نشان‌دهنده ترانهاده[1] است. با ترکیب روابط (۱-۲۴) و (۱-۲۵)، جواب بهینه زیر حاصل می‌شود:

$$w^* = \frac{Q^{-1} e_m^T}{e_m Q^{-1} e_m^T} \tag{۱-۲۶}$$

و Q ماتریس معین مثبت[2] است (رجوع به قضیه (۱-۱۶)).

اگر $w^* \geq 0$ باشد، یعنی عناصر آن همگی بزرگتر یا مساوی صفر باشند، آنگاه با ترکیب معادلات (۱-۲۶) و (۱-۱۲)، به مقادیر کلی شاخصه‌ها دست پیدا می‌کنیم، که بر مبنای آن گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ رتبه‌بندی و سپس انتخاب می‌شوند. اگر $w^* < 0$ باشد (یعنی همگی عناصر آن کمتر از صفر باشند)، آنگاه از مدل برنامه‌ریزی درجه دوم (هارتلی، (۱۹۸۵)[3]) برای حل مدل بهینه‌سازی (*M-1.2*) استفاده می‌کنیم. لذا، از این طریق به مقادیر کلی مشخصه‌ها و رتبه‌بندی گزینه‌ها دست می‌یابیم.

قضیه ۱-۱٦ اگر $H \neq \bar{H}$ آنگاه ماتریس Q^{-1} وجود خواهد داشت که Q یک ماتریس معین مثبت است.

اثبات

$$\begin{aligned} wQw^T &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (h_{ij} r_{jk} - r_{ik})^2 w_k^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1, k \neq l}^{m} (h_{ij} r_{jk} - r_{ik})(h_{ij} r_{jl} - r_{il}) w_k w_l \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} (h_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^2 (w) \end{aligned}$$

[1] Transposition
[2] Positive Definite Matrix
[3] Hartley (1985)

و $H \neq \bar{H}$، بنابراین وقتی $w \neq 0$ (حداقل یکی از عناصر آن صفر نباشد)، $wQw^T > 0$ همواره صادق خواهد بود. همچنین از آنجائیکه Q یک ماتریس متقارن است، بنابر تعریف فرم درجه دوم، می‌توانیم شاهد این باشیم که Q همچنان یک ماتریس معین مثبت است. این یک ویژگی ماتریس معین مثبت است که Q یک ماتریس معکوس‌پذیر[1] باشد، بنابراین Q^{-1} وجود خواهد داشت.

مثال ۱۳-۱ یک مشتری قصد دارد از میان چهار گزینه خرید خانه یعنی $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ یکی را برگزیند. این مشتری، گزینه‌ها را با استفاده از شاخصهای زیر ارزیابی می‌کند (فن و همکاران، (۲۰۰۲)[2]): (۱) u_1: قیمت خانه *(10000$)*، (۲) u_2: مساحت (متر مربع)، (۳) u_3: فاصله تا محل کار (کیلومتر)، (۴) u_4: منطقه سکونتی. که در میان این شاخصه‌ها u_2 و u_4 از جنس سود بوده و u_1 و u_3 از نوع هزینه هستند. اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و ماتریس تصمیم در جدول (۱-۲۰) نشان داده شده است:

جدول ۲۰-۱ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	3.0	100	10	7
x_2	2.5	80	8	5
x_3	1.8	50	20	11
x_4	2.2	70	12	9

حالا با استفاده از روش معرفی شده در قسمت (۱-۷-۲) برای انتخاب بهترین گزینه‌ها استفاده می‌کنیم که ابتدا باید گامهای زیر را طی کنیم.

گام ۱) با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) ماتریس تصمیم A را نرمال کرده و ماتریس نرمال R را بدست می‌آوریم:

[1] Invertible Matrix
[2] Fan et al. (2002)

جدول ۲۱-۱ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.600	1.000	0.800	0.636
x_2	0.720	0.800	1.000	0.455
x_3	1.000	0.500	0.400	1.000
x_4	0.818	0.700	0.667	0.818

گام ۲) بدون از دست دادن کلیت بحث و عمومیت اینگونه مسائل، فرض کنید تصمیم‌گیرنده از مقیاس ۱ تا ۹ برای مقایسه جفت گزینه‌ها استفاده می‌کند. سپس رابطه ترجیحی چندگانه زیر را تشکیل دهید:

$$H=(h_{ij})_{4\times4}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

در ادامه با استفاده از معادله (۱-۲۲)، بردار وزن شاخصه‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w=(0.1247,\ 0.1648,\ 0.3266,\ 0.3839)$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ را برای تمام گزینه‌های x_i محاسبه می‌کنیم:

$$z_1(w)=0.7451,\ z_2(w)=0.7229,\ z_3(w)=0.7216,\ z_4(w)=0.7492$$

سپس رتبه‌بندی گزینه‌ها به شکل زیر خواهد بود:

$$x_4\succ x_1\succ x_2\succ x_3$$

بنابراین، بهترین گزینه در این مسئله گزینه چهارم است.

(۲) موقعیتی که در آن اطلاعات ترجیحی گزینه‌ها از نوع روابط ترجیحی فازی است[1]

فرض کنید تصمیم‌گیرنده جفت گزینه‌ها را با استفاده از مقیاس مکمل مقایسه کرده و سپس یک رابطه ترجیحی فازی[2] $B=(b_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهد. برای یکنواسازی اطلاعات تصمیم، از تابع تبدیلی که در ادامه آن را می‌بینیم برای تبدیل مقادیر کلی شاخصه‌ها برای تمام گزینه‌ها به روابط ترجیحی فازی $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\bar{b}_{ij} &= \frac{1}{2}\,[1+z_i(w)-z_j(w)] \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k-\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k\right] i,\ j=1, 2..., n \end{aligned} \tag{۱-۲۷}$$

واضح است که $\bar{b}_{ij}+\bar{b}_{ji}=1$، $\bar{b}_{ii}=0.5$، $\bar{b}_{ij}\geq 0$ به ازاء تمام مقادیر i و j است.

در حالت کلی، تفاوتی میان رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ و $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ نیست. لذا، در اینجا یک تابع مشتق خطی بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= b_{ij}-\bar{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k-(2b_{ij}-1)\right],\ i,\ j=1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{۱-۲۸}$$

همچنین واضح است که برای محاسبه وزن معقول $w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_m)$ برای شاخصه‌ها، مشتق فوق باید در کمترین مقدار خود باشد. در نتیجه می‌توان مدل بهینه‌سازی زیر را بکار برد:

[1] Xu (2003a)
[2] Fuzzy Preference Relation

$$\textbf{(M-1.3)}\quad \begin{cases} \min\ F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{2}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k+(2b_{ij}-1)\right]^2 \\ s.t. \qquad w_j\ge 0,\ \ j=1,\,2,\,\dots,\,m,\ \ \sum_{j=1}^{m} w_j=1. \end{cases}$$

برای حل مدل فوق، تابع لاگرانژ[1] زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$L(w,\,\zeta)=F(w)+2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m} w_j-1\right)$$

که در این رابطه ζ ضریب لاگرانژ[2] است.

با مشتق‌گیری و متحد صفر قرار دادن تابع لاگرانژ بدست آمده نسبت به $w_l\,(l=1,\,2,\,\dots,\,m)$، یعنی $\frac{\partial L(w,\,\zeta)}{\partial w_l}=0$، دسته معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k-(2b_{ij}-1)\right](r_{il}-r_{jl})+\frac{1}{2}\zeta=0,\ l=1,\,2,\,\dots,\,m \qquad (۱-۲۹)$$

یا به عبارتی:

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl})\right]w_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-2b_{ij})(r_{il}-r_{jl})-\zeta,\ l=1,\,2,\,\dots,\,m \qquad (۱-۳۰)$$

اگر فرض کنیم تساوی $e_m=(1,\,1,\,\dots,\,1)$، $\bar{g}_m=(g_1,\,g_2,\,\dots,\,g_m)$ و $Q=(q_{lk})_{m\times m}$ برقرار باشد، که

$$g_l=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-2b_{ij})(r_{il}-r_{jl}),\ l=1,\,2,\,\dots,\,m$$

و

$$q_{lk}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl}),\ l,\,k=1,\,2,\,\dots,\,m \qquad (۱-۳۱)$$

---

[1] Lagrange Function
[2] Lagrange Multiplier

سپس معادله (۱-۳۰) به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$Qw^T = \bar{g}_m^T - \zeta e_m^T \qquad (۱-۳۲)$$

با تغییر $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ به فرم برداری، آنگاه خواهیم داشت:

$$e_m w^T = 1 \qquad (۱-۳۳)$$

با ترکیب معادلات (۱-۳۲) و (۱-۳۳)، جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$w^* = Q^{-1}(\bar{g}_m^T - \zeta e_m^T) \qquad (۱-۳۴)$$

که در رابطه فوق:

$$\zeta = \frac{e_m Q^{-1} \bar{g}_m^T - 1}{e_m Q^{-1} \bar{g}_m^T} \qquad (۱-۳۵)$$

و Q یک ماتریس معین مثبت است (قضیه(۱-۱۷) را ببینید).

اگر $w^* \geq 0$ باشد، آنگاه می‌توان معادله (۱-۳۴) را در معادله (۱-۱۲) قرار داد و مقادیر کلی شاخصه‌ها را بدست آورد که از طریق این مقادیر می‌توانیم به رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌های مسئله بپردازیم. به خصوص اگر برای هر i و j داشته باشیم: $\sum_{k=1}^{m} r_{ik} w_k = \sum_{k=1}^{m} r_{jk} w_k$، به عبارتی، مقادیر کلی شاخصه‌ها برای تمام گزینه‌ها یکسان باشد، به این معنی است که گزینه‌ها هیچ ترجیحی بر یکدیگر ندارند. اگر $w^* < 0$ باشد، آنگاه می‌توان از روش برنامه‌ریزی درجه دو (هارتلی، (۱۹۸۵)[1]) برای حل مدل مذکور و محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها استفاده کرده و از آن طریق به رتبه‌بندی گزینه‌ها بپردازیم.

قضیه ۱-۱۷ اگر درجه اهمیت حداقل یک جفت از گزینه‌ها متفاوت باشد، پس ماتریس Q^{-1} وجود خواهد داشت و Q یک ماتریس معین مثبت است.

[1] Hartley (1985)

اثبات از آنجاکه

$$
\begin{aligned}
wQw^T &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})^2 w_k^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1,k\neq l}^{m}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl})w_k w_l \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})w_k\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}r_{ik}w_k-\sum_{k=1}^{m}r_{jk}w_k\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[z_i(w)-z_j(w)\right]^2
\end{aligned}
$$

اگر حداقل یک جفت (i,j) که $i \neq j$ و $z_i(w) \neq z_j(w)$ باشد، یعنی اگر درجه اهمیت حداقل یک جفت از گزینه‌ها متفاوت باشد (این امر می‌تواند با استفاده از معادله (۱-۱۲) مشخص شود)، آنگاه رابطه $wQw^T > 0$ برای $w = (w_1, w_2, ..., w_m) \neq 0$ معتبر خواهد بود. همچنین، از آنجائیکه Q یک ماتریس متقارن[1] است، آنگاه بر اساس تعریف فرم درجه دوم، می‌دانیم که Q یک ماتریس معین مثبت است. طبق ویژگی ماتریسهای معین مثبت، مشاهده می‌شود که Q یک ماتریس وارون‌پذیر[2] است، بنابراین Q^{-1} وجود خواهد داشت.

مثال ۱۴-۱ برای تولید محصولات جدید، پنج پروژه سرمایه‌گذاری $x_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ بعنوان گزینه‌های قابل انتخاب وجود دارند. از یک تصمیم‌گیرنده دعوت شد تا این پروژه‌ها را با معیارهایی که در ادامه ذکر می‌شوند ارزیابی کند (ونگ، (۱۹۸۹)[3]): (۱) u_3: میزان سرمایه‌گذاری *(10^5\$)*، (۲) u_2: سود خالص مورد انتظار *(10^5\$)*، (۳) u_3: مقدار سود مخاطره‌آمیز[4] *(10^5\$)*، (۴) u_4: مقدار زیان مخاطره‌آمیز *(10^5\$)*. مقدار ارزیابی شاخصه‌ها برای تمامی پروژه‌ها در جدول (۱-۲۲) قرار دارند.

---

1 Symmetrical Matrix
2 Invertible Matrix
3 Wang (1989)
4 Venture Profit

در میان شاخصه‌های u_j، دو مشخصه u_2 و u_3 از جنس سود هستند در حالیکه u_1 و u_4 از جنس هزینه هستند. اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است. در ادامه، از روشی که بالا به آن اشاره شد برای رتبه‌بندی و انتخاب پروژه‌های سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنیم.

جدول ۲۲-۱ ماتریس تصمیم

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	5.20	5.20	4.73	0.473
x_2	10.08	6.70	5.71	1.599
x_3	5.25	4.20	3.82	0.473
x_4	9.72	5.25	5.54	1.313
x_5	6.60	3.75	3.30	0.803

گام ۱) از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) به منظور نرمال‌سازی ماتریس A استفاده می‌کنیم و آن را به ماتریس R تبدیل می‌کنیم که در جدول (۱-۲۳) این مقادیر نرمال قابل مشاهده‌اند:

جدول ۲۳-۱ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	0.776	0.828	1
x_2	0.516	1	1	0.296
x_3	0.990	0.627	0.669	1
x_4	0.535	0.784	0.970	0.360
x_5	0.788	0.560	0.578	0.589

گام ۲) فرض کنید تصمیم‌گیرنده از مقیاس *0.1-0.9* برای مقایسه هر جفت از گزینه‌ها استفاده می‌کند و سپس ماتریس روابط فازی[1] را تشکیل می‌دهد:

[1] Fuzzy Preference Relation

$$B=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}$$

از معادله (۱-۳۴) برای بدست آوردن وزن شاخصه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$w=(0.2014,\ 0.1973,\ 0.5893,\ 0.0120)$$

گام ۳) بر مبنای بردار وزن w، از معادله (۱-۱۲) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای تمامی پروژه‌های x_i استفاده می‌کنیم:

$$z_1(w)=0.8544\,,\ \ z_2(w)=0.8941\,,\ \ z_3(w)=0.7293$$
$$z_4(w)=0.8384\,,\ \ z_5(w)=0.6169$$

که از روی مقادیر فوق، رتبه‌بندی پروژه‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$$

یعنی پروژه دوم از تمامی پروژه‌ها در این مسئله بهتر است.

(۳) موقعیتی که در آن ترجیح بین گزینه‌ها از نوع مقادیر مطلوبیت است

فرض کنید تصمیم‌گیرنده ترجیح خود را روی گزینه x_i با استفاده از مقدار مطلوبیت ϑ_i بیان می‌کند که $\vartheta_i \in [0,1]$ است. هرچقدر مقدار ϑ_i به یک نزدیکتر شود، ترجیح تصمیم‌گیرنده روی آن گزینه بیشتر خواهد بود. مقدار شاخصه r_{ij} از ماتریس نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ می‌تواند به عنوان مقدار ترجیح هدف برای گزینه x_i با توجه به شاخصه u_j بیان شود.

به دلیل محدودیتهای ایجاد شده در شرایط مختلف، بین مقدار هدف و مقدار ذهنی تصمیم‌گیرنده، تفاوت وجود دارد. برای معقول‌تر کردن نتایج تصمیم، بردار بهینه وزن w باید طوری تعیین شود که کمترین فاصله

ممکن بین مقدار هدف و مقدار ذهنی تصمیم‌گیرنده ایجاد شود. در نتیجه مدل بهینه‌سازی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-1.4)}\ \begin{cases} \min\ F(w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[(r_{ij}-\vartheta_i)w_j\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}-\vartheta_i)^2 w_j^2 \\ s.t. \qquad w_j \geq 0,\ \ j=1,2,\ldots,m,\ \sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \end{cases}$$

برای حل مدل بهینه‌سازی *(M-1.4)*، تابع لاگرانژ را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(w,\zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}-\vartheta_i)^2 w_j^2 + 2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m} w_j - 1\right)$$

که در این تابع، ζ ضریب لاگرانژ است.

با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ فوق و متحد صفر قرار دادن آن معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial w_j} = 2\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2 w_j + 2\zeta = 0, \qquad j=1,2,\ldots,m \\ \dfrac{\partial L}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m} w_j - 1 = 0 \end{cases}$$

آنگاه:

$$w_j = -\frac{\zeta}{\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2}, \quad j=1,2,\ldots,m \tag{۱-۳۶}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \tag{۱-۳۷}$$

که بر اساس آن خواهیم داشت:

$$\zeta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta)^2}} \tag{۱-۳۸}$$

و طبق معادلات (۱-۳۶) و (۱-۳۸) خواهیم داشت که:

$$w_j = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (r_{ij} - \vartheta)^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (r_{ij} - \vartheta_i\right)^2}, \ j = 1, 2, \ldots, m \qquad (۱-۳۹)$$

بعد از بدست آوردن بردار وزن بهینه، از معادله (۱-۱۲) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ استفاده می‌کنیم، که از این طریق رتبه‌بندی بین گزینه‌ها انجام می‌شود.

جدول ۲٤-۱ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.95	0.90	0.93	0.85	0.91	0.95
x_2	0.90	0.88	0.85	0.92	0.93	0.91
x_3	0.92	0.95	0.96	0.84	0.87	0.94
x_4	0.89	0.93	0.88	0.94	0.92	0.90
x_5	0.93	0.91	0.90	0.89	0.92	0.95

مثال ۱۵-۱ یک مثال کاربردی از روش فوق شامل ارزیابی کادر یک سازمان برای ارتقاء و انتصاب در آن سازمان است. فرض کنید پنج کاندیدا وجود دارد: $x_i(i = 1, 2, 3, 4, 5$. شاخصه‌هایی که در اینجا در نظر گرفته شده‌اند عبارتند از: (۱) u_1: وضعیت اخلاقی، (۲) u_2: نگرش کاری، (۳) u_3: سبکِ کاری، (۴) u_4: سطح تحصیلات و ساختار دانش، (۵) u_5: قابلیت رهبری، (۶) u_6: ظرفیت اکتشاف و رشد. وزن اطلاعات کاملاً نامعلوم است و اطلاعات ارزیابی کاندیداها با توجه به شاخصه‌ها در قالب درجه‌های عضویت بیان شده است که در ماتریس تصمیم نرمال R قابل مشاهده هستند. این ماتریس در جدول (۱-۲۴) قرار گرفته است.

فرض کنید ترجیحات ذهنی تصمیم‌گیرنده برای نامزدهای x_i به صورت زیر است:

$$\vartheta_1 = 0.82\ ,\ \vartheta_2 = 0.85\ ,\ \vartheta_3 = 0.90\ ,\ \vartheta_4 = 0.75\ ,\ \vartheta_5 = 0.95$$

در ادامه با استفاده از معادله (۱-۳۹) داریم:

$$w_1 = 0.1778\ ,\ w_2 = 0.1615\ ,\ w_3 = 0.2015$$
$$w_4 = 0.1441\ ,\ w_5 = 0.1565\ ,\ w_6 = 0.1586$$

پس از آن با استفاده از معادله (۱-۱۲) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$z_1(w) = 0.9172\ ,\ z_2(w) = 0.8959\ ,\ z_3(w) = 0.9162$$
$$z_4(w) = 0.9079\ ,\ z_5(w) = 0.9166$$

پس از آن کاندیداها را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$$

که کاندیدای اول از بقیه کاندیداها بهتر است.

۱-۸ مدل حداکثرسازی اجماع در تعیین وزن شاخصه‌ها در *MAGDM*

۱-۸-۱ مدل حداکثرسازی اجماع[1]

در ابتدا، مقدمه‌ای مختصر در مورد مسائل *MAGDM* بیان می‌کنیم. یک مسئله *MAGDM* مسئله‌ای است که در آن با توجه به بازیگران زیر تصمیم‌گیری می‌شود: یعنی یک مجموعه گزینه X و یک مجموعه شاخصه گسسته[2] U داریم (که بردار وزن آنها $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ باید تعیین شود و در این بردار $w_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ است). به علاوه، یک گروه از تصمیم‌گیرندگان $d_k(k=1, 2, ..., t)$ (با بردار وزن $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ که $\lambda_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$) برای مشارکت در فرآیند تصمیم‌گیری دعوت شده‌اند. در این حالت t ماتریس تصمیم $A_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ وجود دارد که $a_{ij}^{(k)}$ مقدار مثبت شاخصه‌ها است و توسط تصمیم‌گیرنده d_k برای گزینه x_i با توجه به شاخصه u_j تعیین شده است. روابط معرفی شده در بخش (۱-۱-۲) می‌توانند برای تبدیل ماتریس تصمیم $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ به ماتریس نرمال $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ استفاده شوند، بگونه‌ای که همه مشخصه‌ها بصورت واحدهای بی‌بُعد سنجش شوند (هوانگ و یون، (۱۹۸۱)[3]).

عملگر *WA* (هارسانی، (۱۹۵۵)[4]، هوانگ و یون، (۱۹۸۱)[5]) یک روش رایج برای ترکیب داده‌های منفرد است. به منظور تدارک نظر گروهی، از عملگر *WA* به منظور تجمیع ماتریسهای تصمیم نرمال انفرادی[6] $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ استفاده کرده و ماتریس تصمیم نرمال جمعی[7] $R=(r_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهیم، جاییکه:

---

[1] Consensus Maximization Model
[2] Discrete Set of Attributes
[3] Hwang and Yoon (1981)
[4] Harsanyi (1955)
[5]
[6] Individual Normalized Decision Matrices
[7] Collective Normalized Decision Matrix

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)}, \; for \; all \quad i=1, 2, ..., n, \quad j=1, 2, ..., m \qquad (۱-۴۰)$$

اگر گروه کاملاً هم نظر باشند یعنی وفاق کامل برقرار باشد، باید ماتریس تصمیم هر فرد برابر ماتریس تصمیم جمعی باشد. یعنی $R_k = R$. بنابراین:

$$r_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)}, \quad for \; all \;\; k=1, 2, ..., t, \; i=1, 2, ..., n, \;\; j=1, 2, ..., m \qquad (۱-۴۱)$$

و فرم وزن‌دار معادله (۱-۴۱) به صورت زیر است:

$$w_i r_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k w_i r_{ij}^{(k)} \;\; for \; all \;\; k=1, 2, ..., t \qquad (۱-۴۲)$$

ولی معادله (۱-۴۲) در حالت کلی صادق نیست، چرا که تصمیم‌گیرندگان هر یک تجربیات شخصی و ساختار دانشی خود را دارند. پس تابع مشتق $e_{ij}^{(k)}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_{ij}^{(k)} = \left(w_i r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k w_i r_{ij}^{(k)} \right)^2 = \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 \; w_i^2$$
$$for \; all \;\; k=1, 2, ..., t \;, \;\; i=1, 2, ..., n, \;\; j=1, 2, ..., m \qquad (۱-۴۳)$$

و تابع مشتق زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f(w) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 \; w_i^2 \qquad (۱-۴۴)$$

در تصمیم‌گیری گروهی[۱] ، نتیجه مطلوب باید طبق حداکثر توافق و اجماع گروه باشد. این بدان معناست که تفاوت بین نظر هر فرد و نظر گروه باید تا حتی‌الامکان کوچک شود. یعنی باید بین ماتریس تصمیم

[1] Group Decision Making

انفرادی[1] و ماتریس تصمیم جمعی[2] کمترین فاصله ممکن وجود داشته باشد. طبق این ایده و تحلیلهای فوق، مدل برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را تشکیل می‌دهیم (ژوو، (۲۰۱۱)[3]):

$$\textbf{(M-1.5)} \quad f(w^*) = \min \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 w_i^2$$

که این مدل دارای محدودیتهای $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ به ازای $j = 1, 2, ..., n$ است.

جهت حل این مدل، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(w, \zeta) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 w_j^2 - 2\zeta \left(\sum_{j=1}^{m} w_j - 1 \right) \qquad (۱-۴۵)$$

که در این تابع ζ همان ضریب لاگرانژ است.

با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ نسبت به $w_j (j = 1, 2, ..., m)$ و ζ و سپس متحد صفر قرار دادن آنها روابط زیرحاصل می‌شود:

$$\frac{\partial L(w, \zeta)}{\partial w_j} = 2\sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 w_j - 2\zeta = 0, \; j = 1, 2, ..., m \qquad (۱-۴۶)$$

$$\frac{\partial L(w, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m} w_j - 1 = 0 \qquad (۱-۴۷)$$

پس از ساده‌سازی معادله (۱-۴۶) خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{(k)} \right)^2 w_j - \zeta = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m \qquad (۱-۴۸)$$

---

[1] Individual Decision Matrix
[2] Collective Decision Matrix
[3] Xu (2011a)

و پس از آن با استفاده از معادله (۱–۴۸) آنگاه:

$$w_j = \frac{\zeta}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{(k)}\right)^2}, \qquad j=1, 2, ..., m \tag{۱–۴۹}$$

از معادلات (۱–۴۷) و (۱–۴۹) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\zeta = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{(k)}\right)^2}} \tag{۱–۵۰}$$

و بنابراین، با استفاده از معادلات (۱–۱۴) و (۱–۱۵) آنگاه:

$$w_j^* = \frac{\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{(k)}\right)^2}}}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{(k)}\right)^2}, \qquad j=1, 2, ..., m \tag{۱–۵۱}$$

که جواب بهینه مدل *(M-1.5)* است. در حالت خاص اگر مخرج کسر در معادله (۱–۵۱) برابر صفر باشد، معادله (۱–۴۱) صدق می‌کند، یعنی گروه دارای توافق نظر و وفاق کامل است و ماتریس تصمیم انفرادی معادل با ماتریس تصمیم جمعی خواهد بود. در این صورت گویی تمامی شاخصه‌ها را ملزم کرده‌ایم که وزنهای برابری را بپذیرند.

پس از آن مبتنی بر ماتریس جمعی $R = (r_{ij})_{n\times m}$ و جواب بهینه وزن‌های w_j^* ، مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^*)$ روی تمامی گزینه‌ها با استفاده از عملگر WA حاصل می‌شوند:

$$z_i(w^*) = \sum_{j=1}^{m} w_j^* r_{ij}, \; i=1, 2, ..., n \tag{۱–۵۲}$$

که در رابطه فوق $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_n^*)$ و سپس با استفاده از معادله (۱–۵۲) می‌توانیم گزینه‌ها را رتبه‌بندی کنیم و بهترین آنها را انتخاب کنیم.

۱-۸-۲ مثال کاربردی

مثال ۱-۱٦ (ژوو، (۲۰۱۱)[1]) یک واحد نظامی قصد خرید سلاح توپخانه‌ای دارد و چهار نوع سلاح توپخانه‌ای جهت خرید وجود دارد (گزینه‌ها) $x_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$. شاخصه‌ها در این فرآیند تصمیم‌گیری به صورت زیر هستند: (۱) u_1: شاخصهای قابلیت حمله، (۲) u_2: شاخصهای قابلیت واکنش (ارزیابی شده در مقیاس ۱ تا ۵)، (۳) u_3: شاخصهای تحرک (m)، (۴) u_4: شاخصهای پایداری و مانایی (ارزیابی شده در مقیاس ۰ تا ۱) و (۵) u_5: هزینه. در میان این پنج شاخصه، چهار مشخصه اول u_j از نوع سود و u_5 از نوع هزینه است. یک گروه خبره شامل سه خبره $d_k (k = 1, 2, 3)$ (که بردار وزنشان برابر $\lambda = (0.4, 0.3, 0.3)$ است) برای تصمیم‌گیری در مورد خرید این تجهیزات دعوت به نظردهی شده‌اند. این خبرگان گزینه‌ها را با توجه به شاخصه‌ها ارزیابی می‌کنند و سه ماتریس تصمیم $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{4\times5}$ (جداول (۱–۲۵) تا (۱–۲۷)) را تشکیل می‌دهند:

جدول ۱-۲۵ ماتریس تصمیم A_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	26000	3	19000	0.8	15000
x_2	70000	4	16000	0.3	28000
x_3	50000	2	17000	0.7	25000
x_4	45000	1	28000	0.5	16000

[1] Xu (2011a)

جدول ۲۶-۱ ماتریس تصمیم A_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	27000	4	18000	0.7	16000
x_2	60000	3	17000	0.4	27000
x_3	55000	2	15000	0.8	26000
x_4	40000	2	29000	0.4	15000

جدول ۲۷-۱ ماتریس تصمیم A_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	28000	3	20000	0.7	17000
x_2	60000	4	18000	0.4	26000
x_3	60000	3	16000	0.7	27000
x_4	50000	2	30000	0.4	18000

از آنجائیکه شاخصه‌های u_j دارای واحدهای اندازه‌گیری متفاوتی هستند، از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) برای تبدیل ماتریسهای تصمیم به ماتریسهای تصمیم نرمال $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{4\times5}$ استفاده می‌کنیم که در جداول (۱-۲۸) تا (۱-۳۰) قابل مشاهده هستند:

جدول ۲۸-۱ ماتریس تصمیم نرمال R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.37	0.75	0.68	1.00	1.00
x_2	1.00	1.00	0.57	0.38	0.54
x_3	0.71	0.50	0.61	0.88	0.60
x_4	0.64	0.25	1.00	0.63	0.94

جدول ۲۹-۱ ماتریس تصمیم نرمال R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.45	1.00	0.62	0.88	0.94
x_2	1.00	0.75	0.59	0.50	0.56
x_3	0.92	0.50	0.52	1.00	0.58
x_4	0.67	50	1.00	0.50	1.00

جدول ۳۰-۱ ماتریس تصمیم نرمال R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.47	0.75	0.67	1.00	1.00
x_2	1.00	1.00	0.60	0.57	0.65
x_3	1.00	0.75	0.53	1.00	0.63
x_4	0.83	0.50	1.00	0.57	0.94

با استفاده از معادله (۱-۴۰) و بردار وزن خبرگان $\lambda = (0.4, 0.3, 0.3)$، اطلاعات ماتریسهای تصمیم سه فرد خبره را $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{4\times5}$ به ماتریس تصمیم نرمال جمعی $R = (r_{ij})_{4\times5}$ تبدیل می‌کنیم. جدول شماره (۱-۳۱) ملاحظه گردد:

جدول ۳۱-۱ ماتریس تصمیم تجمعی R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.42	0.83	0.66	0.96	0.98
x_2	1.00	0.93	0.59	0.47	0.58
x_3	0.86	0.58	0.56	0.95	0.60
x_4	0.71	0.40	1.00	0.57	0.96

اگر بردار وزن شاخصه‌ها به صورت $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ باشد، از جداول (۱-۲۸) تا (۱-۳۱) و معادله (۱-۵۱) برای تعیین بردار وزن بهینه w^* استفاده می‌کنیم. لذا، داریم:

$$w^* = (0.06, 0.02, 0.56, 0.08, 0.28) \qquad (۱-۵۳)$$

و مقدار بهینه هدف مورد نظر برابر با $f(w^*) = 0.004$ است. بر مبنای معادلات (۱−۵۲) و (۱−۵۳) و ماتریس تصمیم نرمال جمعی $R = (r_{ij})_{4\times 5}$، مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^*)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$z_1(w^*) = 0.76\,,\ \ z_2(w^*) = 0.60\,,\ \ z_3(w^*) = 0.62\,,\ \ z_4(w^*) = 0.93$$

و رتبه‌بندی گزینه‌ها به شکل زیر است:

$$x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$$

که گزینه چهارم، بهترین گزینه ممکن است.

فصل دوم

حل مسائل *MADM* با وجود ترجیحات بر روی وزن شاخصه‌ها

منظور از مسائل *MADM* با شاخصه‌های ترجیحی آنست که در این نوع از مسائل، تصمیم‌گیرنده مستقیماً امکان برآورد وزن شاخصه‌ها را نداشته و به جای آن از مقیاسی به منظور مقایسه زوجی گزینه‌ها استفاده کرده و سپس روابط ترجیحی را شکل می‌دهد. (در حالت کلی، از روابط ترجیحی چندگانه[۱] و روابط ترجیحی فازی[۲] استفاده می‌کنیم). در ادامهٔ چنین رویکردی، از یکی از روشهای اولویت‌بندی مناسب به منظور استخراج بردار اولویت روابط ترجیحی استفاده شده که از روی آن می‌توان وزن شاخصه‌ها را بدست آورد.

برای تکمیل فرایند حل نیز می‌توان از روشهای اولویت‌بندی مرتبط با آنها استفاده کرد. تئوری و روشهای اولویت‌بندی "روابط ترجیحی چندگانه" در سالهای اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده و پژوهشهای ارزشمندی در این زمینه انجام شده است. همچنین، پژوهش در زمینه روشهای اولویت‌بندی "روابط ترجیحی فازی" نیز توجه روزافزونی را به خود جلب کرده است. با در نظر گرفتن نقش مهم روابط ترجیحی فازی در حل مسائل *MADM* که در آنها مقادیر شاخصه‌ها اعداد فاصله‌ای هستند، در این فصل عمدتاً به

[1] Multiplicative Preference Relations
[2] Fuzzy Preference Relations

معرفی تئوری اولویت‌بندی و روشهای روابط ترجیحی فازی می‌پردازیم. همچنین، با استفاده از عملگرهای WAA، CWA، WG و CWG روشهایی برای حل اینگونه مسائل $MADM$ معرفی کرده و هر یک از این روشها را با جزئیات بیشتر و با مثالهای کاربردی بررسی می‌کنیم.

۱-۲ روشهای اولویت‌بندی برای یک رابطه ترجیحی فازی

۱-۱-۲ روش انتقال[1] به منظور اولویت‌بندی یک رابطه ترجیحی فازی

تعریف ۱-۲ (تانینو، (۱۹۸۴)[2]) فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد. حال اگر داشته باشیم:

$$(b_{ik}-0.5)+(b_{kj}-0.5)=b_{ij}-0.5, \quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۱-۲)$$

یعنی اگر معادله $b_{ij}=b_{ik}-b_{jk}+0.5$ برقرار باشد، آنگاه B یک رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار[3] نامیده می‌شود.

فرض کنید G یک مجموعه از تمام روابط ترجیحی فازی مرتبه n باشد. آنگاه بردار n بُعدی مثبت $w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)$ بردار اولویت[4] نامیده می‌شود. در این بردار هر یک از عناصر w وزن یک شیء (یعنی وزن گزینه و یا شاخصه) در مسئله است. همچنین، Λ را مجموعه‌ای از بردارهای اولویت در نظر می‌گیریم که در آن:

$$\Lambda=\left\{ w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n) \mid w_j>0,\ \ j=1,\ 2,\ ...,\ n,\ \sum_{j=1}^{n} w_j=1 \right\}$$

---

[1] Translation Method
[2] Tanino (1984)
[3] Additive Consistent Fuzzy Preference Relation
[4] Priority Vector

است. حال یک روش اولویت‌بندی را می‌توان به عنوان نگاشتی از G به روی Λ در نظر گرفت که با $w=\Gamma(B)$ نشان داده می‌شود و w بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی B نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۲ (وانگ و ژوو، (۱۹۸۹)[1]) یک روش اولویت‌بندی را روش اولویت‌بندی محافظ رتبه قوی[2] می‌نامیم، اگر $b_{ik} \ge b_{jk}$ باشد، آنگاه به ازای هر k رابطه $w_i \ge w_j$ برقرار باشد. همچنین، تنها زمانی $w_i = w_j$ است که اگر و تنها اگر به ازای هر k، $b_{ik} = b_{jk}$ باشد.

تعریف ۳-۲ (ژوو، (۲۰۰۱)[3]) یک رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ را تراگذار رتبه[4] می‌نامند، اگر دو شرط زیر را ارضاء نماید:

۱) اگر $b_{ij} \ge 0.5$ باشد، آنگاه به ازای هر k، داشته باشیم $b_{ij} \ge b_{jk}$

۲) اگر $b_{ij} = 0.5$ باشد، آنگاه به ازای هر k، داشته باشیم $b_{ij} \ge b_{jk}$ یا $b_{ij} \le b_{jk}$

تعریف ٤-۲ ((ژوو، (۲۰۰۱)) فرض کنید $\Gamma(\bullet)$ یک روش اولویت‌بندی و B هر رابطه ترجیحی فازی باشد، در اینصورت $w=\Gamma(B)$ است. حال اگر $\Psi w^T = \Gamma(\Psi B \Psi^T)$ به ازای هر جایگشت از ماتریس Ψ باشد، آنگاه روش اولویت‌بندی $\Gamma(\bullet)$ یک روش تغییرناپذیری جایگشت[5] نامیده می‌شود.

قضیه ۱-۲ (دوو، (۱۹۹۶)[6]) برای یک رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ فرض کنید داشته باشیم:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \qquad i=1,\, 2,\, \dots,\, n \tag{۲-۲}$$

که b_i مجموع تمام عناصر در i امین سطر B است. با استفاده از رابطه (۲-۲)، تبدیل ریاضی زیر را داریم:

[1] Wang and Xu (1989)
[2] Strong Rank Preservation
[3] Xu (2001c)
[4] Rank Transitivity
[5] Permutation Invariance
[6] Du (1996)

$$\bar{b}_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a} + 0.5 \qquad (۲-۳)$$

آنگاه ماتریس $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار نامیده می‌شود.

به طور کلی، به منظور سهولت محاسبات مقدار a را برابر $2(n-1)$ در نظر می‌گیریم، که به صورت زیر خواهیم داشت (ژوو، (۲۰۰۱)[1]):

۱) اگر از مقیاس *0-1* استفاده نمائیم، آنگاه طیف مقادیر عنصر $\bar{b}_{ij}$ در ماتریس $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ اعدادی بین صفر و یک را اتخاذ می‌کنند، یعنی داریم $0 \le \bar{b}_{ij} \le 1$. با ترکیب این فرض با معادله (۲-۳) خواهیم داشت:

$$a \ge 2(n-1) \qquad (۲-۴)$$

۲) اگر از مقیاس *0.1-0.9* استفاده شود، معادله (۲-۴) همچنان برقرار است.

بدیهی است که هرچه مقدار a بزرگتر باشد، طیف مقادیر $\bar{b}_{ij}$ بدست آمده از رابطه (۲-۳) کوچکتر خواهد بود، که این امر باعث کمتر شدن درجه نزدیکی[2] میان رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار و رابطه ترجیحی فازی اولیه می‌شود. (بدین معنی که اطلاعات قضاوتی کمتری از رابطه ترجیحی فازی اولیه اخذ شده است). بنابراین، زمانی که a کمترین مقدار خود یعنی $2(n-1)$ را می‌گیرد، رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار بدست آمده از معادله (۲-۳) می‌تواند تا حد ممکن به اطلاعات قضاوتی در رابطه ترجیحی فازی اولیه نزدیک باشد و نتیجتاً انحرافات بین عناصر این دو رابطه ترجیحی فازی نیز به حداقل کاهش یابد. طبیعتاً این نوع انحراف، ناشی از بهبود سازگاری رابطه ترجیحی فازی اولیه است. برای روابط ترجیحی فازی با مرتبه‌های مختلف، مقادیر a نیز با افزایش مرتبه n تغییر خواهند کرد و این امر با شرایط واقعی سازگارتر است. به علاوه، رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار بدست آمده از معادله (۲-۳) با تفکر تصمیم

---

[1] Xu (2001a)
[2] Closeness Degree

انسانی نیز همسو و منطبق بوده و استواری[1] خوب و تراگذاری مناسبی دارد (منظور از استواری خوب آن است که زیرماتریس بدست آمده از حذف هر سطر و ستون متناظر آن نیز یک رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار است)

به منظور بدست آوردن رابطه ترجیحی فازی سازگار افزایشی[2] $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ از هر رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ ما از فرمول تبدیل (۲-۳) استفاده می‌کنیم. سپس، برای بدست آوردن بردار اولویت می‌توان از روش تجمیع رتبه نرمال‌ساز[3] استفاده نمود.

در ادامه و بر اساس ایده فوق‌الذکر، فرمولی را برای بدست آوردن بردار اولویت یک رابطه ترجیحی فازی معرفی می‌کنیم.

قضیه ۲-۲ (ژوو، (۲۰۰۱)[4]) گیریم $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، آنگاه با استفاده از معادله (۲-۲) و تبدیل ریاضی زیر:

$$\bar{b}_{ij}=\frac{b_i-b_j}{2(n-1)}+0.5 \qquad (۲-۵)$$

ماتریس $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ را بدست می‌آوریم، که بر اساس آن، روش تجمیع رتبه نرمال‌ساز را بکار گرفته تا بردار اولویت (که رابطه زیر را ارضاء می‌کند)، بدست آوریم:

$$w_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (۲-۶)$$

این روش اولویت‌بندی را روش انتقال برای اولویت‌بندی یک رابطه ترجیحی فازی می‌نامند.

---

[1] Robustness
[2] Additive Consistent Fuzzy Preference Relation
[3] Normalizing Rank Aggregation
[4] Xu (2001a)

اثبات با استفاده از معادلات (۲-۱)، (۲-۲) و (۲-۵) خواهیم داشت:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}}{\sum_{1\le i<j\le n} (\bar{b}_{ij} + \bar{b}_{ji}) + 0.5n}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}}{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij}}{\frac{n^2}{2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{b_i - b_j}{2(n-1)} + 0.5 \right]}{\frac{n^2}{2}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{b_i - b_j}{n-1} + n}{n^2}$$

$$= \frac{b_i + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)}$$

قضیه ۳-۲ (ژوو، (۲۰۰۱)[1]) روش انتقال، یک روش محافظ رتبه قوی است:

اثبات اگر $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی $B = (b_{ij})_{n\times n}$ باشد، آنگاه:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)}, \quad w_l = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{lj} + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)}$$

اگر به ازای هر j، رابطه $b_{ij} \ge b_{lj}$ برقرار باشد، آنگاه با توجه به دو معادله فوق می‌بینیم که $w_i \ge w_l$ است. شرط تساوی دو وزن یعنی $w_i = w_l$ تنها زمانی برقرار است که به ازای هر j، تساوی $b_{ij} = b_{lj}$ برقرار باشد. بنابراین، روش انتقال یک روش محافظ رتبه قوی است. با استفاده از تعریف (۲-۳) و قضیه (۲-۳)، قضیه (۲-۴) را خواهیم داشت:

[1] Xu (2001a)

قضیه ۲-٤ (ژوو، (۲۰۰۱)[1]) فرض کنید رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ تراگذار رتبه باشد. اگر $b_{ij}\geq 0.5$ باشد، آنگاه $w_i \geq w_l$ خواهد بود؛ اگر $b_{ij}=0.5$ باشد، آنگاه $w_i \geq w_l$ یا $w_i \leq w_l$ می‌باشد، جاییکه $w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_n)$ بردار اولویت حاصل از روش انتقال برای رابطه ترجیحی فازی B است.

قضیه ۲-۵ (ژوو، (۲۰۰۱)) روش انتقال، دارای ویژگی تغییرناپذیری جایگشت است.

اثبات فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد و Ψ ماتریس جایگشت باشد، به‌طوری که $C=(c_{ij})_{n\times n}=\Psi B \Psi^T$، $w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_n)$ و $v=(v_1,\, v_2,\, ...,\, v_n)$ به ترتیب بردارهای اولویت حاصل از روش انتقال برای B و C باشند. حال پس از جایگشت، i امین سطر از B تبدیل به l امین سطر از C می‌شود و i امین ستون B تبدیل به l امین ستون C می‌شود و بنابراین:

$$w_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_{lj}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}=v_l$$

که نشان می‌دهد روش انتقال نسبت به جایگشت تغییرناپذیر است. بر اساس قضیه (۲-۲)، می‌توان دریافت که روش انتقال دارای ویژگیهای زیر است:

۱) این روش با استفاده از معادله (۲-۶) می‌تواند بردار اولویت را مستقیماً از رابطه ترجیحی فازی نخستین محاسبه کند.

۲) این روش نه‌تنها می‌تواند به طور مناسبی از ویژگیهای مطلوب و اطلاعات قضاوتی رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار استفاده نماید، بلکه نیاز به محاسبات کمتری نسبت به سایر روشها دارد.

۳) این روش بسیاری از گامهای غیرضروری میانی را حذف می‌کند. بنابراین، برای کاربردهای واقعی بسیار مناسب است.

---

[1] Xu (2001a)

در کنار این محاسن، روش انتقال این عیب را نیز دارد که تفاوت میان عناصر بردار اولویت حاصله در آن تا حدی کوچک هستند که گاهی تمایز میان آنها کار آسانی نیست.

۲-۱-۲ روش حداقل پراکندگی[1] به‌منظور اولویت‌بندی رابطه ترجیحی فازی

در این بخش از دید بهینه‌سازی، یعنی از زاویه حداقل سازی مغایرت و یا انحراف میان دو رابطه ترجیحی به موضوع می‌پردازیم. بدین منظور، برای آنکه رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار ایجاد شده از طریق اوزان اولویت به رابطه ترجیحی فازی اولیه نزدیک باشد، روشی را تحت عنوان روش حداقل پراکندگی به منظور دستیابی به بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی معرفی خواهیم کرد.

فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی و $w=(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n)$ بردار اولویت آن باشد، اگر:

$$b_{ij}=w_i-w_j+0.5 \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{۲-۷}$$

آنگاه به ازای هر l، تساوی $b_{ij}=b_{il}-b_{jl}+0.5$ برقرار است. بنابراین، $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار است. اگر B رابطه ترجیحی فازی جمع‌پذیر سازگار نباشد، آنگاه معمولاً معادله (۲-۷) برقرار است. در نتیجه، یک عنصر مغایرت یا انحراف را به شکل زیر معرفی می‌کنیم، به عبارتی:

$$f_{ij}=b_{ij}-(w_i-w_j+0.5) \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

و تابع انحراف[2] آنرا به صورت زیر ایجاد می‌کنیم:

$$F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}-(w_i-w_j+0.5)]^2$$

---

[1] Least Variation Method
[2] Deviation Function

حال یک بردار اولویت معقول[۱] w^* باید طوری تعیین شود که تابع $F(w)$ حداقل گردد. به عبارتی:

$$F(w^*) = \min_{w \in \Lambda} F(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [b_{ij} - (w_i - w_j + 0.5)]^2$$

این روش را روش حداقل انحراف برای بدست آوردن بردار اولویت یک رابطه ترجیحی فازی می‌نامیم. بنابراین، نتایج زیر را می‌توان برای تابع $F(w)$ در نظر گرفت:

قضیه ۲-۶ (ژوو، (۲۰۰۱)[۲]) فرض کنید $B = (b_{ij})_{n \times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، آنگاه، بردار اولویت $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بدست آمده از روش حداقل انحراف، رابطه زیر را ارضاء می‌کند:

$$w_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{b} b_{ij} + 1 - \frac{n}{2} \right) \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{۲-۸}$$

اثبات تابع لاگرانژ را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(w, \zeta) = F(w) + \zeta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j - 1 \right)$$

که در رابطه فوق ζ ضریب لاگرانژ می‌باشد. با مشتق‌گیری از $L(w, \zeta)$ نسبت به w_i و ζ و همچنین برابر صفر قرار دادن این مشتقات جزئی خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} 2 \left[b_{ij} - (w_i - w_j + 0.5) \right] (-1) + \zeta = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

که شکل ساده شده آن به صورت زیر است:

$$-2 \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} - n w_i + 1 - \frac{n}{2} \right] + \zeta = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{۲-۹}$$

---

[1] Reasonable Priority Vector
[2] Xu (2001c)

با جمع هر دو طرف معادله (۲–۹) به ازای هر i خواهیم داشت:

$$-2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{n^2}{2}\right] + \zeta = 0 \qquad (۲–۱۰)$$

و طبق ویژگی رابطه ترجیحی فازی، رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{n^2}{2} \qquad (۲–۱۱)$$

بنابراین، با قرار دادن معادله (۲–۱۰) در معادله (۲–۱۱)، مقدار $\zeta = 0$ بدست خواهد آمد. سپس، با ترکیب $\zeta = 0$ و معادله (۲–۹)، به معادله (۲–۸) می‌رسیم که اثبات را کامل می‌کند. مشابه قضایای (۲–۳) تا (۲–۵) نتایج زیر را بدست می‌آوریم:

قضیه ۲–۷ (ژوو، (۲۰۰۱)[1]) روش حداقل انحراف، یک روش محافظ رتبه قوی است.

قضیه ۲–۸ (ژوو، (۲۰۰۱)) فرض کنید رابطه ترجیحی فازی $B = (b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه تراگذار رتبه باشد. حال اگر $b_{ij} \geq 0.5$ باشد، آنگاه $w_i \geq w_l$ است و اگر $b_{ij} = 0.5$ باشد، خواهیم داشت $w_i \geq w_l$ یا $w_i \leq w_l$ که $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار اولویت ناشی از روش حداقل انحراف برای رابطه ترجیحی فازی B است.

قضیه ۲–۹ (ژوو، (۲۰۰۱)) روش حداقل انحراف، دارای ویژگی تغییرناپذیری جایگشت است.

با استفاده از معادله (۲–۸)، می‌توان بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی را بدست آورد. در بسیاری از کاربردهای واقعی، شواهد نشان می‌دهد که اگر قضاوت‌های انجام شده برای تصمیم‌گیری توسط تصمیم‌گیرنده مطابق با موقعیت متناظر آن در دنیای واقعی نباشد (به عبارتی، رابطه ترجیحی فازی ساخته شده توسط تصمیم‌گیرنده شدیداً ناسازگار باشد) آنگاه ممکن است مقدار $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$ کمتر از $\frac{n}{2}$ -1 باشد، که

[1] Xu (2001c)

در نتیجه $w_i \le 0$ است. در چنین مواردی یا باید رابطه ترجیحی فازی ایجاد شده توسط تصمیم‌گیرنده را بمنظور ارزیابی مجدد به تصمیم‌گیرنده بازگردانیم یا از روش بهبود سازگاری[1] برای اصلاح رابطه ترجیحی فازی استفاده کنیم.

۲-۱-۳ روش کمترین انحراف[2] به‌منظور اولویت‌بندی رابطه ترجیحی فازی

باز هم از منظر بهینه‌سازی، یعنی از این بابت که رابطه ترجیحی فازی سازگار چندگانه[3] ساخته شده توسط اوزان اولویت، حتی‌الامکان به رابطه ترجیحی فازی اولیه نزدیک باشد، روشی را تحت عنوان روش کمترین انحراف برای بدست آوردن بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی در زیر معرفی می‌کنیم.

۲-۱-۳-۱ مقدمات

در فرآیند *MADM*، تصمیم‌گیرنده شاخصه‌ها را به صورت زوجی یا دوبه‌دو مقایسه می‌کند و ترجیحات (قضاوت) خود را روی شاخصه‌ها بیان می‌کند.

۱) اگر تصمیم‌گیرنده از مقیاس *1-9* (ژوو، (۱۹۹۹)[4]) جهت بیان ترجیحاتش استفاده کند و رابطه ترجیحی چندگانه $H = (h_{ij})_{n\times n}$ که دارای ویژگیهای زیر است، را تشکیل دهد:

$$h_{ij} \in \left[\frac{1}{9}, 9\right] \quad h_{ji} = \frac{1}{h_{ij}} \quad h_{ii} = 1 \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

---

[1] Consistency Improving Method
[2] Least Deviation Method
[3] Multiplicative Consistent Fuzzy Preference Relation
[4] Xu (1999)

در این حال اگر $h_{ij}=h_{ik}h_{kj}$ باشد، آنگاه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ رابطه ترجیحی سازگار چندگانه[۱] نامیده می‌شود (ساعتی، (۱۹۸۰)[۲] ؛ وانگ و ژوو، (۱۹۸۹)[۳]).

۲) در صورتی که تصمیم‌گیرنده از مقیاس *0.1-0.9* (ژوو، (۱۹۹۹)[۴]) برای بیان ترجیحاتش استفاده کند و رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ با ویژگیهای زیر را تشکیل دهد:

$$b_{ij}\in[0.1,\,0.9]\qquad b_{ij}+b_{ji}=1\qquad b_{ii}=0.5\quad i,\ j=1,\,2,\,...,\,n$$

حال اگر $b_{ik}b_{kj}b_{ji}=b_{ki}b_{jk}b_{ij}$ باشد، آنگاه $B=(b_{ij})_{n\times n}$ رابطه ترجیحی فازی سازگار چندگانه نامیده می‌شود (اورلوفسکی، (۱۹۷۸)[۵] ؛ ژوو، (۲۰۰۲)[۶]).

با توجه به رابطه ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$، از فرمول تبدیل زیر (ژوو، (۱۹۹۹)):

$$b_{ij}=\frac{h_{ij}}{h_{ij}+1}\,,\quad i,\ j=1,\,2,\,...,\,n$$

جهت بدست آوردن رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ استفاده می‌کنیم.

همچنین، با توجه به رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ و با استفاده از رابطه تبدیل زیر (ژوو، (۱۹۹۹)):

$$h_{ij}=\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}\,,\ \ i,\ j=1,\,2,\,...,\,n$$

رابطه ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ را بدست می‌آوریم. با در نظر گرفتن این نتایج، قضایای پیش رو به راحتی قابل اثبات خواهند بود:

---

[1] Multiplicative Preference Relation
[2] Saaty (1980)
[3] Wang and Xu (1989)
[4] Xu (1999)
[5] Orlovsky (1978)
[6] Xu (2002f)

قضیه ۱۰-۲ (ژوو، (۱۹۹۹)[1]) فرض کنید $H=(h_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی چندگانه باشد، آنگاه رابطه ترجیحی فازی متناظر با آن یعنی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ می‌تواند با استفاده از رابطه تبدیل زیر بدست آید:

$$b_{ij}=\frac{1}{1+h_{ji}}\,,\quad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۲-۱۲)$$

قضیه ۱۱-۲ (ژوو، (۲۰۰۲)[2]) فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، آنگاه رابطه ترجیحی فازی چندگانه[3] متناظر با آن یعنی $H=(h_{ij})_{n\times n}$ می‌تواند با استفاده از تبدیل زیر بدست آید:

$$h_{ij}=\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\qquad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۲-۱۳)$$

قضیه ۱۲-۲ (ژوو، (۲۰۰۲)) اگر $H=(h_{ij})_{n\times n}$ رابطه ترجیحی چندگانه سازگار[4] باشد، آنگاه رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ حاصل از معادله (۲-۱۲) یک رابطه ترجیحی فازی چندگانه است.

قضیه ۱۳-۲ (ژوو، (۲۰۰۲)) اگر $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی چندگانه باشد، آنگاه رابطه ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ بدست آمده از معادله (۲-۱۳)، یک رابطه ترجیحی فازی چندگانه سازگار است.

تعریف ۵-۲ (ژوو، (۲۰۰۲)) اگر $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، آنگاه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ ماتریس تبدیل B نامیده می‌شود که در آن $h_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{b_{ji}}$ است.

از آنجا که معادلات (۲-۱۲) و (۲-۱۳) رابطه نزدیکی بین دو نوع متفاوت از اطلاعات ترجیحی را تشکیل می‌دهد، از اهمیت نظری فراوان و پتانسیل کاربردی بالایی نیز برخوردار هستند.

---

[1] Xu (1999)
[2] Xu (2002d)
[3] Multiplicative Fuzzy Preference Relation
[4] Multiplicative Preference Relation

۲-۳-۱-۲ نتایج اصلی

اگر $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ بردار اولویت یک رابطه ترجیحی چندگانه همچون $H = (h_{ij})_{n\times n}$ بوده که در آن $\gamma_j > 0$ و $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1$ باشد، آنگاه در صورتی که H یک رابطه ترجیحی چندگانه سازگار باشد، به ازای هر i و j خواهیم داشت: $h_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}$.

اگر معادله $h_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}$ را با معادله (۲-۱۲) تلفیق کنیم، آنگاه $b_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j}$ است. اگر $b_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j}$ را در $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij}$ قرار دهیم نیز همین نتیجه حاصل می‌شود. به عبارتی $B = (b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی چندگانه سازگار است. بنابراین، اگر $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی B باشد که در آن $w_j > 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ است، آنگاه B یک رابطه ترجیحی فازی چندگانه سازگار است و داریم $b_{ij} = \frac{w_i}{w_i + w_j}$، به عبارتی $(1-b_{ij})w_i = b_{ij}w_j$. از آنجاکه $b_{ij} + b_{ji} = 1$ است، لذا داریم:

$$b_{ji}w_i = b_{ij}w_j, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n \tag{۲-۱۴}$$

$$w_i = \frac{b_{ij}}{b_{ji}} w_j, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n \tag{۲-۱۵}$$

$$\frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i} = \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_i}{w_j} = 1, \quad i,\ j = 1, 2, ..., n \tag{۲-۱۶}$$

با ترکیب معادله (۲-۱۵) و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ جواب دقیق بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی چندگانه سازگار B را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$w=\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i1}}{b_{1i}}},\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i2}}{b_{2i}}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{in}}{b_{ni}}}\right) \tag{۲-۱۷}$$

با توجه به اینکه رابطه ترجیحی فازی بدست آمده توسط تصمیم‌گیرنده در فرآیند تصمیم‌گیری معمولاً ناسازگار است، معادله (۲-۱۶) نیز به تبع آن عموماً صادق نیست. در نتیجه، عامل انحراف زیر را معرفی می‌کنیم:

$$f_{ij}=\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j}-2,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{۲-۱۸}$$

و تابع انحراف زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j}-2\right),\ \ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{۲-۱۹}$$

بدیهی است که یک بردار اولویت معقول w^*، باید طوری محاسبه گردد که تابع $F(w)$ را کمینه سازد، به عبارتی:

$$\begin{cases}\min\ F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j}-2\right)\\ s.t.\quad w_j>0,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1\end{cases} \tag{۲-۲۰}$$

این روش را روش کمترین انحراف برای محاسبه بردار اولویت یک رابطه ترجیحی فازی می‌نامیم (ژوو و دا، (۲۰۰۵)[1]). نتایج زیر برای تابع $F(w)$ بدست می‌آید:

[1] Xu and Da (2005)

قضیه ۱۴-۲ (ژوو و دا، (۲۰۰۵))تابع حداقل انحراف $F(w)$ یک نقطه کمینه واحد w^* دارد، که جواب واحد دسته معادلات زیر در Λ است:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_i}{w_j}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۲-۲۱)$$

که Λ در بخش (۲-۱-۱) تعریف شده است.

اثبات

(۱) (**وجودی**[۱]) از آنجاکه Λ یک بردار کراندار در فضا است، $F(w)$ یک تابع پیوسته در Λ برای هر $w \in \Lambda$ و به ازای هر i و j است:

$$\frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i} + \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_i}{w_j} \geq 2\sqrt{\frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_j}{w_i} \frac{w_i}{w_j}} = 2$$

از این رو $F(w) \geq 0$ است. از آنجاکه $w_i > 0$ است، داریم:

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}} \left(-\frac{w_j}{w_i^2} \right) + \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \left(\frac{1}{w_j} \right) \right)$$

بنابراین، $F(w)$ نسبت به $w_i > 0$ مشتق‌پذیر است. همچنین، از آنجاکه:

$$\frac{\partial^2 F(w)}{\partial w_i^2} = 2\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i^3} \right) > 0, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

بنابراین، $F(w)$ برای $w_i > 0$ اکیداً محدب[۲] است. در نتیجه، $F(w)$ دارای یک کمینه مقدار[۳] است، به عبارتی، یک مقدار ثابت d وجود دارد به قسمی که $d = \inf\{F(w) \mid w \in \Lambda\}$ است. از این‌رو، یک

---

[1] Existence
[2] Stricly Convex
[3] Infimum

مقدار $w^* \in \Lambda$ وجود دارد به طوری که $F(w^*) = d$ (زیرا اگر w به سمت کران‌های Λ حرکت کند، یعنی برخی w_iها به صفر میل کند، آنگاه $F(w)$ به سمت مثبت بینهایت ($+\infty$) میل می‌کند). لذا، w^* نقطه کمینه w^* از Λ بوده و در نتیجه $F(w^*)$ کمترین مقدار را به خود می‌گیرد. در جائیکه w^* جواب مسئله فرینه یا غایی[1] شرطی زیر است:

$$\begin{cases} \min\ F(w) \\ s.t. \quad w_j > 0, \ \ j = 1, 2, ..., n, \ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \end{cases} \tag{۲-۲۲}$$

تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L(w, \zeta) = F(w) + \zeta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j - 1 \right) \tag{۲-۲۳}$$

که ζ ضریب لاگرانژ است.

با گرفتن مشتق جزئی از $L(w, \zeta)$ نسبت به w_i و ζ و متحد صفر قرار دادن این مشتقات خواهیم داشت:

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{1}{w_j} + \zeta = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{۲-۲۴}$$

با ضرب معادله (۲-۲۴) در w_i رابطه زیر بدست می‌آید:

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j}{w_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_i}{w_j} + \zeta w_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{۲-۲۵}$$

به عبارتی،

[1] Conditional Extremum Problem

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j}+\zeta=0,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{۲-۲۶}$$

از آنجاکه

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j} \tag{۲-۲۷}$$

پس، $\zeta = 0$ است. بنابراین، با ترکیب $\zeta = 0$ با معادله (۲-۲۵)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{w_j}{w_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{w_i}{w_j},\quad i=1,2,\ldots,n \tag{۲-۲۸}$$

و در نتیجه، w^*، جواب دسته معادلات (۲-۲۱) است.

۲) (**یکتایی**[۱]) فرض کنید $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)\in\Lambda$ و $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in\Lambda$ جوابهای دسته معادلات (۲-۲۱) باشند. همچنین، فرض کنید $\theta_i=\frac{v_i}{w_i}$ و $\delta_l=\max_j\{\delta_j\}$ باشد. حال اگر یک j وجود داشته باشد به گونه‌ای که $\delta_j<\delta_l$ باشد، آنگاه:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{w_j}{w_l}>\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{w_j}{w_l}\frac{\delta_j}{\delta_l}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{v_j}{v_l} \tag{۲-۲۹}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{w_l}{w_j}<\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{w_l}{w_j}\frac{\delta_l}{\delta_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{v_l}{v_j} \tag{۲-۳۰}$$

در نتیجه، از معادلات (۲-۲۱)، (۲-۲۹) و (۲-۳۰) خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{w_j}{w_l}>\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{w_l}{w_j} \tag{۲-۳۱}$$

---

[1] Uniqueness

که با دسته معادلات (۲-۲۱) در تناقض است. در نتیجه به ازای هر i داریم $\delta_i = \delta_l$، به عبارتی:

$$\frac{w_1}{v_1} = \frac{w_2}{v_2} = \cdots \frac{w_n}{v_n}$$

همچنین، از آنجاکه $w, v \in \Lambda$، آنگاه $w_i = v_i$ است، به عبارتی $w = v$، که اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۱۵-۲ (ژوو و دا، (۲۰۰۵)[1]) روش کمترین انحراف، یک روش محافظ رتبه قوی است.

اثبات از آنجاکه بردار اولویت $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ از روش کمترین انحراف برای رابطه ترجیحی فازی B بدست آمده است، پس رابطه زیر را برآورده می‌سازد:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ik}}{b_{ki}} \frac{w_k}{w_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ki}}{b_{ik}} \frac{w_i}{w_k} \qquad (۲-۳۲)$$

به عبارتی:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ik}}{b_{ki}} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ki}}{b_{ik}} \frac{w_i^2}{w_k} \qquad (۲-۳۳)$$

همچنین، از آنجاکه:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{jk}}{b_{kj}} \frac{w_k}{w_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{kj}}{b_{jk}} \frac{w_j}{w_k} \qquad (۲-۳۴)$$

آنگاه:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{jk}}{b_{kj}} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{kj}}{b_{jk}} \frac{w_j^2}{w_k} \qquad (۲-۳۵)$$

از آنجاکه به ازای هر k، $b_{ik} \ge b_{jk}$ است، پس نامساوی $b_{ki} \le b_{kj}$ برقرار است، به عبارتی $\frac{1}{b_{ki}} \ge \frac{1}{b_{kj}}$ می‌باشد. بنابراین، $\frac{b_{ik}}{b_{ki}} \ge \frac{b_{jk}}{b_{kj}}$ است. در نتیجه:

[1] Xu and Da (2005)

$$\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\ w_k \geq \frac{b_{jk}}{b_{kj}}\ w_k \qquad (۲-۳۶)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ik}}{b_{ki}}\ w_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{jk}}{b_{kj}}\ w_k \qquad (۲-۳۷)$$

با دخیل کردن معادلات (۲-۳۳)، (۲-۳۵) و (۲-۳۷) داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ki}}{b_{ik}}\ \frac{w_i^2}{w_k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{kj}}{b_{jk}}\ \frac{w_j^2}{w_k} \qquad (۲-۳۸)$$

همچنین از آنجاکه $b_{ik} \geq b_{jk}$ (یعنی $b_{ki} \leq b_{kj}$)، پس به ازای هر k داریم $\frac{b_{ki}}{b_{ik}} \geq \frac{b_{kj}}{b_{jk}}$.

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_i^2}{w_k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{w_j^2}{w_k} \qquad (۲-۳۹)$$

بر اساس معادله (۲-۳۹) داریم $w_i^2 \geq w_j^2$. بنابراین $w_i \geq w_j$ است، که اثبات را کامل می‌کند.

با استفاده از قضیه (۲-۱۵)، قضایای زیر به سادگی اثبات می‌شوند:

قضیه ۲-۱٦ (ژوو و دا، (۲۰۰۵)[1]) رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ با ویژگی تراگذاری رتبه را در نظر بگیرید. اگر $b_{ij} \geq 0.5$ باشد، آنگاه $w_i \geq w_j$؛ اگر $b_{ij} = 0.5$ باشد، آنگاه $w_i \geq w_j$ یا $w_i \leq w_j$ است، که $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار اولویت بدست آمده از روش کمترین انحراف برای رابطه ترجیحی فازی B است.

[1] Xu and Da (2005)

۳-۳-۱-۲ الگوریتم تکرارشونده همگرا[1]

فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی و k به عنوان تعداد تکرارها باشند. برای حل معادلات (۲۱-۲)، الگوریتم تکرارشونده همگرا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (ژوو و دا، (۲۰۰۵)[2]):

گام ۱) با توجه به بردار وزن اولیه یعنی $w(0)=(w_1(0),\ w_2(0),\ ...,\ w_n(0))\in\Lambda$ ، پارامتر ε $(0\le\varepsilon<1)$ را تعیین کرده و $k=0$ قرار دهید.

گام ۲) مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$\eta_i[w(k)]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\ \frac{w_j(k)}{w_i(k)}-\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\ \frac{w_i(k)}{w_j(k)}\right),\quad i=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۲-۴۰)$$

اگر به ازای هر i ، $|\eta_i[w(k)]|<\varepsilon$ برقرار گردید، آنگاه $w=w(k)$ قرار داده و به گام ۵ بروید؛ در غیراینصورت به گام ۳ بروید.

گام ۳) عدد l به گونه‌ای تعیین کنیدکه $|\eta_l[w(k)]|=\max_i\{|\eta_i[w(k)]|\}$ و مقادیر زیر را محاسبه زیرکنید:

$$v(k)=\left(\frac{\sum_{j\ne k}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\ \frac{w_j(k)}{w_l(k)}}{\sum_{j\ne l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\ \frac{w_l(k)}{w_j(k)}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲-۴۱)$$

$$w_i^{'}(k)=\begin{cases}v(k)w_l(k), & i=l,\\ w_i(k), & i\ne l,\end{cases} \qquad (۲-۴۲)$$

---
[1] Convergent Iterative Algorithm
[2] Xu and Da (2005)

$$w_i(k+1)=\frac{w_i^{'}(k)}{\sum_{j=1}^{n} w_j^{'}(k)}\ , \quad i=1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (۲-۴۳)$$

گام ٤) مقدار k را یک واحد اضافه نمائید، یعنی $k=k+1$ و به گام ۲ بازگردید.

گام ٥) بردار w، یعنی بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی B را به عنوان خروجی محاسبه کنید.

توضیح ۱-۲ اگر $\varepsilon=0$ باشد، آنگاه بردار اولویت w مربوط به B، که از الگوریتم فوق بدست آمده، یک نقطه کمینه یکتا[1] یعنی w^* برای $F(w)$ است (که در قضیه (۲-۱۴) معرفی شد)؛ اگر $0<\varepsilon<1$ باشد، آنگاه بردار اولویت w مربوط به B، بدست آمده با استفاده از الگوریتم فوق، یک تقریب از w^* است.

قضیه ۲-۱۷ (ژوو و دا، (۲۰۰۵)[2]) برای هر $0\le\varepsilon<1$ و بردار وزن اولیه $w(0)=(w_1(0),\ w_2(0),\ ...,\ w_n(0))\in\Lambda$ الگوریتم تکرارشونده فوق همگرا است.

اثبات یک تغییر در $F(w)$، که در آن $w\in\Lambda$ است، را در نظر بگیرید. فرض کنید $\alpha>0$ و داریم:

$$\begin{aligned} r(\alpha)=F(\dot{w}(k))&=F(w_1(k),\ w_2(w),\ ...,\ w_{l-1}(k),\\ &\qquad \alpha w_l(k),\ w_{l+1}(k),\ ...,\ w_n(k))\\ &=2(\sum_{j\ne l}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\ \frac{w_j(k)}{\alpha w_l(k)}+\sum_{j\ne l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\ \frac{\alpha w_l(k)}{w_j(k)}\\ &\qquad +\sum_{i\ne l}\sum_{j\ne l}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\ \frac{w_j(k)}{w_i(k)}-(n^2-1)) \end{aligned} \qquad (۲-۴۴)$$

اگر:

$$h_0=\sum_{i\ne l}\sum_{j\ne l}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\ \frac{w_j(k)}{w_i(k)}-(n^2-1) \qquad (۲-۴۵)$$

---

[1]Unique Minimum Point
[2] Xu and Da (2005)

$$h_1 = \sum_{j \neq l} \frac{b_{lj}}{b_{jl}} \frac{w_j(k)}{w_l(k)} \qquad (۲-۴۶)$$

$$h_2 = \sum_{j \neq l} \frac{b_{jl}}{b_{lj}} \frac{w_l(k)}{w_j(k)} \qquad (۲-۴۷)$$

آنگاه معادله (۲-۴۴) را می‌توان به شکل $r(\alpha) = 2\left(\frac{h_1}{\alpha} + h_2\alpha + h_0\right)$ بازنویسی کرد. حال با مشتق‌گیری از $r(\alpha)$ نسبت به α، یعنی $\frac{dr}{d\alpha} = 0$، به مقادیر α^* و $r(\alpha^*)$ دست خواهیم یافت، بطوری که $r(\alpha^*) = \min\ r(\alpha)$ است. یعنی:

$$\alpha^* = \left(\frac{\sum_{j \neq k} \frac{b_{lj}}{b_{jl}} \frac{w_j(k)}{w_l(k)}}{\sum_{j \neq l} \frac{b_{jl}}{b_{lj}} \frac{w_l(k)}{w_j(k)}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲-۴۸)$$

$$r(\alpha^*) = 4\sqrt{h_1 h_2} + 2h_0 \qquad (۲-۴۹)$$

اگر $\alpha^* = 1$، آنگاه با استفاده از معادله (۲-۴۸) داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{lj}}{b_{jl}} \frac{w_j(k)}{w_l(k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{jl}}{b_{lj}} \frac{w_l(k)}{w_j(k)} \qquad (۲-۵۰)$$

طبق تعریف l در گام سوم الگوریتم تکرارشونده داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{b_{ji}} \frac{w_j(k)}{w_i(k)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ji}}{b_{ij}} \frac{w_i(k)}{w_j(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۲-۵۱)$$

از قضیه (۲-۱۴) نتیجه می‌شود که الگوریتم تکرارشونده در مقدار $w^* = w(k)$ متوقف می‌شود.

اگر $\alpha^* \neq 1$ آنگاه:

$$F(w(k)) - F(\dot{w}(k)) = r(1) - r(\alpha^*)$$

$$= 2(h_1 + h_2 - 2\sqrt{h_1 h_2})$$
$$= 2\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)^2 > 0 \qquad (۲-۵۲)$$

از آنجاکه $F(w)$ یک تابع همگن[1] است، آنگاه $F(\dot{w}(k)) = F(w(k+1))$ است. معادله (۲-۵۲) نشان می‌دهد که به ازای هر k، نامساوی $F(w(k+1)) < F(w(k))$ برقرار است، به عبارتی $\{F(w(k))\}$ یک دنباله نزولی یکنوا[2] است. همچنین، از آنجاکه $F(w)$ یک تابع نامنفی با یک نقطه کمینه مقدار در Λ است، طبق اصل تحلیل ریاضی[3]، می‌دانیم که دنباله یکنوای نزولی باید همگرا باشد. پس اثبات کامل می‌شود.

۲-۱-۴ روش بردار ویژه[4] برای اولویت‌بندی یک رابطه ترجیحی فازی

ساعتی[5] در سال ۱۹۸۰ روش بردار ویژه را برای محاسبه بردار اولویت یک رابطه ترجیحی چندگانه توسعه داد. ویژگی شاخص روش بردار ویژه این است که این روش دارای قابلیت چیرگی تجمعی[6] است. به این معنی که از حد بردار چیرگی تجمعی میانگین وزندار[7] برای آشکار کردن رتبه شاخصه‌ها بر حسب درجه اهمیت استفاده می‌کند. ژوو[8] با استفاده از روابط مابین رابطه ترجیحی فازی و رابطه ترجیحی چندگانه، روش بردار ویژه را برای اولویت‌دهی رابطه ترجیحی فازی توسعه داد.

---

[1] Homogenous
[2] Monotone Decreasing Sequence
[3] Principle of Mathematical Analysis
[4] Eigenvector Method
[5] Saaty (1980)
[6] Cumulative Dominance
[7] Weighted Averaging Cumulative Dominance Vector
[8] Xu (2002f)

فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی چندگانه سازگار باشد. از آنجا که ماتریس تبدیل[1] $H=(h_{ij})_{n\times n}$ مربوط به B یک رابطه ترجیحی چندگانه سازگار است جاییکه $h_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$ بوده و $w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_n)$ بردار اولویت B است. بنابراین، یک مسئله مقدار ویژه بصورت زیر وجود دارد:

$$Hw^T=nw^T \tag{۲-۵۳}$$

در عین حال، قضاوت افراد غالباً به جنبه‌های روان‌شناختی آنها همچون: تجربه، یادگیری، موقعیت، حالت ذهنی و امثال آن بستگی دارد. از این‌رو، در فرآیند تصمیم‌گیری ترجیحات ارائه شده توسط تصمیم‌گیرندگان معمولاً ناسازگار است. در نتیجه، معادله (۲-۵۳) به صورت عمومی صادق نیست. بنابراین، معادله (۲-۵۳) را با مسئله مقدار ویژه زیر تقریب می‌زنیم:

$$Hw^T=\lambda_{\max}w^T \tag{۲-۵۴}$$

که $\lambda_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه رابطه ترجیحی چندگانه H بوده و w بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_{\max}$ است. پس از نرمال‌سازی w، این بردار به بردار اولویت‌بندی رابطه ترجیحی چندگانه H تبدیل می‌شود. واضح است که این بردار، بردار اولویت‌بندی رابطه ترجیحی فازی B نیز است. این روش را روش بردار ویژه برای کسب بردار اولویت یک رابطه ترجیحی فازی می‌نامیم (ژوو، (۲۰۰۲)[2]). روش بردار ویژه دارای ویژگی زیر است:

قضیه ۱۸-۲ (ژوو، (۲۰۰۲)) فرض کنید $B=(b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی و $w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_n)$ بعنوان بردار اولویت B بدست آمده از روش بردار ویژه باشد. اگر به ازای هر k، داشته باشیم $b_{ik}\ge b_{jk}\,(b_{ik}\le b_{jk})$، آنگاه $w_i\ge w_j\ \ (w_i\le w_j)$ و حالت تساوی آن به ازای هر k در صورت $b_{ik}=b_{jk}$ رخ می‌دهد.

---

[1] Transformation Matrix
[2] Xu (2002f)

برای بدست آوردن بردار اولویت $w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)$ از رابطه ترجیحی فازی B با استفاده از روش بردار ویژه، ژوو[1] الگوریتم تکرارشونده زیر را توسعه داد:

گام ۱) از فرمول تبدیل $h_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{b_{ji}}$ به منظور تبدیل رابطه ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ به ماتریس متناظر $H=(h_{ij})_{n\times n}$ استفاده کنید.

گام ۲) با استفاده از بردار وزن اولیه $w(0)=(w_1(0),\ w_2(0),\ ...,\ w_n(0))\in\Lambda$، مقدار پارامتر ε $(0\le\varepsilon<1)$ را تعیین نموده و k را برابر صفر در نظر بگیرید.

گام ۳) مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$q_0=\max_j\{w_j(0)\},\ \bar{w}(0)=\frac{w(0)}{q_0}$$

گام ٤) به صورت تکرارشونده مقادیر زیر را محاسبه نمائید:

$$w(k+1)^T=H\ \bar{w}(k)^T,\ q_{k+1}=\max_j\{w_j(k+1)\},\ \bar{w}(k+1)=\frac{w(k+1)}{q_{k+1}}$$

گام ٥) اگر $|q_{k+1}-q_k|<\varepsilon$ باشد، به گام ۶ بروید؛ در غیر اینصورت، قرار دهید $k=k+1$ و به گام ۴ بازگردید.

گام ٦) سپس، $\bar{w}(k+1)$ را نرمال کنید، به عبارتی:

$$w=\frac{\bar{w}(k+1)}{\sum_{j=1}^{n}\bar{w}_j(k+1)}$$

---

[1] Xu (2002f)

که بردار اولویت ماتریس تبدیل H و همچنین بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی B است.

۵-۱-۲ الگوریتم بهبود سازگاری[۱] برای یک رابطه ترجیحی فازی

یک رابطه ترجیحی ایده‌آل باید شرط سازگاری را برآورده سازد. اگر رابطه ترجیحی فازی B، شرط سازگاری را ارضاء نکند، آنگاه B یک رابطه ترجیحی فازی ناسازگار[۲] و ماتریس تبدیل H متناظر آن نیز یک رابطه ترجیحی چندگانه ناسازگار[۳] است. بمنظور کسب اتقان نسبت به قابلیت اطمینان[۴] و دقت اولویت‌بندی یک رابطه ترجیحی لازم است تا سازگاری آن رابطه ترجیحی صحت‌سنجی گردد. ونگ[۵] شاخص سازگاری زیر را برای رابطه ترجیحی چندگانه H معرفی کرد:

$$CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \frac{w_i}{w_j} - 2 \right) \qquad (۲-۵۵)$$

همچنین، ساعتی[۶] نرخ سازگاری زیر را بمنظور صحت‌سنجی یک رابطه ترجیحی چندگانه معرفی نمود:

$$CR = \frac{CI}{RI} \qquad (۲-۵۶)$$

که RI میانگین شاخص سازگاری روابط ترجیحی است که به صورت تصادفی تولید و در جدول (۲-۱) نشان داده شده‌اند.

---

[1] Consistency Improving Algorithm
[2] Inconsistent Fuzzy Preference Relation
[3] Inconsistent Multiplicative Preference Relation
[4] Reliability
[5] Wang (1995)
[6] Saaty (1980)

جدول ۱-۲ میانگین شاخص سازگاری (RI) روابط ترجیحی تولیدی بصورت تصادفی

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
n	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	
RI	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

توجه داشته باشید که اگر $CR < 0.1$ باشد، آنگاه رابطه ترجیحی چندگانه متناظر آن دارای سازگاری قابل قبولی است. با ترکیب معادلات (۲-۱۳)، (۲-۵۵) و (۲-۵۶) می‌توان به یک معادله کلی برای بررسی سازگاری یک رابطه ترجیحی فازی B رسید:

$$\begin{cases} CI = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum\limits_{1 \le i < j \le n} \left(\dfrac{b_{ij}}{b_{ji}} \dfrac{w_j}{w_i} + \dfrac{b_{ji}}{b_{ij}} \dfrac{w_i}{w_j} - 2 \right), \\ CR = \dfrac{CI}{RI} \, . \end{cases} \tag{۲-۵۷}$$

همچنین، اگر $CR < 0.1$ باشد، آنگاه رابطه ترجیحی فازی B دارای سازگاری قابل قبولی است؛ در غیراینصورت، B دارای سازگاری غیرقابل قبول است. در این مورد، یا تصمیم‌گیرنده باید مجدداً مقادیر عناصر B را ارزیابی کند یا می‌توان سازگاری B را با استفاده از سه الگوریتمی که در ادامه مطرح می‌شوند بهبود بخشید:

(۱) اصلاح تمامی عناصر یک رابطه ترجیحی فازی در هر تکرار (الگوریتم شماره یک)

فرض کنید $\Re_n^+ = \{v = (v_1, v_2, ..., v_n) \mid v_i > 0, \ v_i \in \Re, \ i = 1, 2, ..., n\}$ باشد.

لم ۲-۱ (پلکان) (باربین، (۱۹۸۶)[1]) فرض کنید $H=(h_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مثبت باشد، (یعنی $h_{ij}>0$) و $\lambda_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه H باشد. آنگاه:

$$\lambda_{\max}=\min_{v\in \Re_n^+}\max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\frac{v_j}{v_i}$$

لم ۲-۲ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[2]) اگر $x>0$، $y>0$، $\alpha>0$، $\beta>0$ و $\alpha+\beta=1$ باشد، آنگاه نامعادله:

$$x^{\alpha}y^{\beta}\leq \alpha x+\beta y$$

صادق است، اگر و تنها اگر $x=y$ باشد.

لم ۲-۳ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)) فرض کنید $H=(h_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی چندگانه مثبت (یعنی $h_{ij}>0,\ h_{ji}=\dfrac{1}{h_{ij}}$) و $\lambda_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه H باشد. آنگاه:

$$\lambda_{\max}\geq n$$

شرط تساوی در نامعادله فوق روی نمی‌دهد، مگر H سازگار باشد.

قضیه ۲-۱۹ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)) فرض کنید $H=(h_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی چندگانه مثبت و $\lambda_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه متناظر آن و $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ بردار ویژه متناظر $\lambda_{\max}$ باشد. حال $H^*=(h_{ij}^*)_{n\times n}$ را در نظر بگیرید به قسمی که:

$$h_{ij}^*=h_{ij}^{\alpha}\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)^{1-\alpha}\quad i,\ j=1,2,\dots,n,\quad 0<\alpha<1$$

---

[1] Barbean (1986)
[2] Xu and Da (2003a)

و فرض کنید $\mu_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه H^* باشد، آنگاه $\mu_{\max} \le \lambda_{\max}$ است. در اینصورت، شرط تساوی حاصل نمی‌شود مگر H^* سازگار باشد.

اثبات اگر $e_{ij} = h_{ij}\left(\dfrac{\gamma_j}{\gamma_i}\right)$ باشد، آنگاه $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}$ و $h_{ij}^* = e_{ij}^{\alpha}\left(\dfrac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)$ خواهد بود. بواسطه لمهای (۲-۱) تا (۲-۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\max} &= \min_{v \in \Re_n^+} \max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^* \frac{v_j}{v_i} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^* \frac{\gamma_j}{\gamma_i} \\
&= \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^{\alpha} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} (\alpha e_{ij} + 1 - \alpha) \\
&\le \alpha \lambda_{\max} + (1-\alpha) n \le \lambda_{\max}
\end{aligned}
$$

که شرط تساوی رخ نمی‌دهد مگر $\lambda_{\max} = n$ باشد. به عبارتی H یک رابطه ترجیحی سازگار چندگانه است، که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲۰-۲ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[1]) فرض کنید $H = (h_{ij})_{n \times n}$ یک رابطه ترجیحی چندگانه باشد، بگونه‌ای که $\lambda_{\max}$ بیشینه مقدار ویژه متناظر آن و $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ بردار ویژه متناظر با $\lambda_{\max}$ است. حال $H^* = (h_{ij}^*)_{n \times n}$ را در نظر بگیرید به قسمی که:

$$
h_{ij}^* = \begin{cases} \alpha h_{ij} + (1-\alpha)\dfrac{\gamma_i}{\gamma_j}, & i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = i, i+1, \ldots, n, \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha h_{ji} + (1-\alpha)\dfrac{\gamma_j}{\gamma_i}}, & i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1, \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases}
$$

و $\mu_{\max}$ را بیشینه مقدار ویژه در نظر بگیرید، آنگاه:

[1] Xu and Da (2003a)

$$\mu_{\max} \leq \lambda_{\max}$$

و تساوی حاصل نمی‌شود مگر H^* سازگار باشد.

اثبات اگر $e_{ij} = a_{ij}\left(\frac{w_j}{w_i}\right)$ باشد، آنگاه $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}$ است. ابتدا اثبات می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} \leq \alpha e_{ij} + (1-\alpha) \tag{۲-۵۸}$$

به عبارتی:

$$\left(\alpha e_{ij} + (1-\alpha)\right)\left(\alpha e_{ji} + (1-\alpha)\right) \geq 1 \tag{۲-۵۹}$$

که می‌تواند به شکل زیر ساده‌سازی شود:

$$e_{ij} + \frac{1}{e_{ij}} \geq 2 \tag{۲-۶۰}$$

واضح است که معادله (۲-۶۰) باید صادق باشد و بنابراین معادله (۲-۵۸) نیز صادق است. از این‌رو، قضیه اثبات می‌شود. از لم (۲-۱) و معادله (۲-۵۸) داریم:

$$\mu_{\max} = \min_{v \in \Re_n^+} \max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^* \frac{v_j}{v_i} \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^* \frac{\gamma_j}{\gamma_i}$$

$$= \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha h_{ji} + (1-\alpha)\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\right)} + \sum_{j=i}^{n} \left(\alpha h_{ij} + (1-\alpha)\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j}\right)\right) \right\} \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_i}\right)$$

$$= \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} + \sum_{j=i}^{n} \left(\alpha e_{ij} + (1-\alpha)\right) \right\}$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left(\alpha e_{ij} + (1-\alpha)\right) + \sum_{j=i}^{n} \left(\alpha e_{ij} + (1-\alpha)\right) \right\}$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha e_{ij} + (1-\alpha) \right) = \alpha \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} + (1-\alpha)n$$
$$\leq \alpha\lambda_{\max} + (1-\alpha)n \leq \alpha\lambda_{\max} + (1-\alpha)\lambda_{\max} = \lambda_{\max}$$

که شرط تساوی تنها در $\lambda_{\max} = n$ رخ می‌دهد، یعنی H یک رابطه ترجیحی سازگار چندگانه است که قضیه ثابت می‌شود. در ادامه، یک الگوریتم همگرای تکرارشونده به منظور بهبود رابطه ترجیحی فازی معرفی می‌کنیم. سپس دو معیار برای صحت‌سنجی اثر آن بر بهبود رابطه معرفی خواهیم کرد (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[۱]).

- (الگوریتم شماره یک)

فرض کنید $B = (b_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی با سازگاری غیرقابل قبول و k تعداد تکرارهای الگوریتم و $\alpha \in (0, 1)$ باشد.

گام ۱) ابتدا $B^{(0)} = (b_{ij}^{(0)})_{n\times n} = (b_{ij})_{n\times n}$ و $k = 0$ را قرار دهید.

گام ۲) از معادله (۲-۱۳) رابطه ترجیحی چندگانه $H^{(0)} = (h_{ij}^{(0)})_{n\times n}$ را بدست آورید.

گام ۳) بردار وزن $\gamma^{(k)} = (\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, ..., \gamma_n^{(k)})$ مربوط به رابطه $H^{(k)} = (h_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ را محاسبه نمائید.

گام ٤) نرخ سازگاری $CR^{(k)}$ را از معادلات (۲-۵۵) و (۲-۵۶) محاسبه کنید. اگر $CR^{(k)} < 0.1$ باشد، آنگاه به گام ۷ بروید؛ در غیر اینصورت به گام ۵ بروید.

گام ۵) فرض کنید $H^{(k+1)} = (h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$ باشد که در آن $h_{ij}^{(k+1)}$ می‌تواند با استفاده از معادلات زیر حاصل شود:

۱) میانگین هندسی وزنی

[1] Xu and Da (2003a)

$$h_{ij}^{(k+1)}=\left(h_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\gamma_i^{(k)}}{\gamma_j^{(k)}}\right)^{1-\alpha}\ ,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

۲) میانگین حسابی وزنی

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}\alpha h_{ij}^{(k)}+(1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_i^{(k)}}{\gamma_j^{(k)}}\right),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ j=i,\ i+1,\ \ldots,\ n\\[2ex] \dfrac{1}{\alpha h_{ji}^{(k)}+(1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_j^{(k)}}{\gamma_i^{(k)}}\right)}\ ,\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ i-1\end{cases}$$

گام ٦) سپس $k=k+1$ را قرار داده و به گام سوم بازگردید.

گام ۷) رابطه ترجیحی فازی $B^{(k)}=(b_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ متناظر را محاسبه نمائید.

گام ۸) مقدار k، $B^{(k)}$ و $CR^{(k)}$ را محاسبه کرده، در اینصورت $B^{(k)}$ رابطه ترجیحی فازی بهبود یافته[1] با سازگاری قابل قبول خواهد بود.

مشابه اثبات قضیه ۲، مربوط به ژوو و وی[2] و مطابق قضایای (۲-۱۹) و (۲-۲۰)، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

قضیه ۲-۲۱ (**همگرایی الگوریتم شماره یک**) (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[3]) برای الگوریتم فوق، داریم:

$$CR^{(k+1)}<CR^{(k)},\ \lim_{k\to+\infty}CR^{(k)}=0$$

طبق این قضیه، این الگوریتم در تعداد محدودی از تکرارها به اتمام می‌رسد. به منظور بررسی اثربخشی بهبود فوق دو معیار زیر را در نظر می‌گیریم:

---

[1] Improved Fuzzy Preference Relation
[2] Xu and Wei (1999)
[3] Xu and Da (2003a)

$$\delta^{(k)}=\max_{i,j}\left\{\left|b_{ij}^{(k)}-b_{ij}^{(0)}\right|\right\} \quad i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n$$

$$\sigma^{(k)}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}^{(k)}-b_{ij}^{(0)}\right)^{2}}}{n}$$

روابط فوق را می‌توان به عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری درجه انحراف بین $B^{(k)}$ و $B^{(0)}$ در نظر گرفت. بدیهی است که $\delta^{(k)} \geq \sigma^{(k)} \geq 0$ است.

در حالت کلی، اگر $\delta^{(k)} < 0.2$ و $\sigma^{(k)} < 0.1$ باشد، آنگاه بهبود مورد نظر قابل قبول است. در این مورد، رابطه ترجیحی فازی بهبود یافته می‌تواند تا حد ممکن حاوی اطلاعات قضاوتی رابطه ترجیحی فازی اولیه باشد. در اینجا دو الگوریتم دیگر را ارائه خواهیم کرد:

(۲) اصلاح عناصر یک سطر و ستون در ماتریس رابطه ترجیحی فازی در هر تکرار (الگوریتم شماره دو)[1]

الگوریتم شماره دو تنها گام پنجم از الگوریتم شماره یک را به صورت زیر تغییر می‌دهد و الباقی همانند الگوریتم شماره یک می‌باشد:

گام ۵) تمام ستون‌های $H^{(k)}=(h_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ را نرمال نموده، سپس ماتریس نرمال متناظر $\bar{H}^{(k)}=(h_1^{(k)},h_2^{(k)},...,h_n^{(k)})$ را بدست بیاورید، جاییکه $h_i^{(k)}(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ بردار سطری $\bar{H}^{(k)}$ است. در انتها، کسینوس زاویه بین $\gamma^{(k)}$ و $h_i^{(k)}$ را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$\cos\ \theta_i^{(k)}=\frac{<\gamma^{(k)},\ h_i^{(k)}>}{\left|\gamma^{(k)}\right|\left|h_i^{(k)}\right|}$$

که در رابطه فوق:

[1] Xu (2002e)

$$<\gamma^{(k)}, h_i^{(k)}> = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(k)} h_{ij}^{(k)}, \ \left|\gamma^{(k)}\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j^{(k)}\right)^2}, \ \left|h_i^{(k)}\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(h_{ij}^{(k)}\right)^2}$$

سپس، l را طوری تعیین کنید که $\cos\theta_l^{(k)} = \min_i \left\{\cos\theta_i^{(k)}\right\}$ باشد. همچنین، $H^{(k+1)} = (h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید به طوری که $h_{ij}^{(k+1)}$ بتواند با استفاده از یکی از روشهای زیر تعیین گردد:

۱) روش میانگین موزون هندسی

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} (h_{il}^{(k)})^{\alpha} \left(\dfrac{\gamma_i^{(k)}}{\gamma_l^{(k)}}\right)^{(1-\alpha)} &, \ j = l \\ (h_{lj}^{(k)})^{\alpha} \left(\dfrac{\gamma_l^{(k)}}{\gamma_j^{(k)}}\right)^{(1-\alpha)} &, \ i = l \\ h_{ij}^{(k)}, & otherwise \end{cases}$$

۲) میانگین موزون حسابی

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha h_{il}^{(k)} + (1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_i^{(k)}}{\gamma_l^{(k)}}\right), & j = l \\ \dfrac{1}{\alpha h_{jl}^{(k)} + (1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_j^{(k)}}{\gamma_l^{(k)}}\right)}, & i = l \\ h_{ij}^{(k)}, & otherwise \end{cases}$$

(۳) اصلاح جفت عناصر دارای بیشترین انحراف در رابطه ترجیحی فازی در هر تکرار (الگوریتم شماره سه)[1]

الگوریتم شماره سه، گامهای اول تا چهار و ششم تا هشتم را حفظ کرده و فقط گام پنجم از الگوریتم شماره یک را به صورت زیر تغییر می‌دهد:

گام ۵) فرض کنید $e_{ij}^{(k)} = h_{ij}^{(k)}\left(\dfrac{\gamma_j^{(k)}}{\gamma_i^{(k)}}\right)$ باشد، حال l و s را به گونه‌ای تعیین کنید که $e_{ls}^{(k)} = \max\limits_{i,j}\left\{e_{ij}^{(k)}\right\}$ باشد. همچنین، فرض کنید $H^{(k+1)} = (h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$ باشد که در آن $h_{ij}^{(k+1)}$ می‌تواند به یکی از طرق زیر محاسبه شود:

۱) میانگین موزون هندسی

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} (h_{ls}^{(k)})^{\alpha}\left(\dfrac{\gamma_l^{(k)}}{\gamma_s^{(k)}}\right)^{1-\alpha}, & (i,j)=(l,s) \\ (h_{sl}^{(k)})^{\alpha}\left(\dfrac{\gamma_s^{(k)}}{\gamma_l^{(k)}}\right)^{1-\alpha}, & (i,j)=(s,l) \\ h_{ij}^{(k)}, & (i,j)\neq(l,s),(s,l) \end{cases}$$

[1] Xu (2002e)

۲) میانگین موزون حسابی

$$h_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha h_{ls}^{(k)} + (1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_l^{(k)}}{\gamma_s^{(k)}}\right), & (i,\ j) = (l,\ s) \\ \dfrac{1}{\alpha h_{ls}^{(k)} + (1-\alpha)\left(\dfrac{\gamma_l^{(k)}}{\gamma_s^{(k)}}\right)}, & (i,\ j) = (s,\ l) \\ h_{ij}^{(k)}, & (i,\ j) \neq (l,\ s), (s,\ l) \end{cases}$$

مثال ۱-۲ ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

این ماتریس رابطه ترجیحی فازی اولیه است که مقادیر w و CR آن به شکل زیر است:

$$w = (0.2044,\ 0.2697,\ 0.2973,\ 0.2286)$$

$$CR = 0.1593$$

از الگوریتم فوق برای بهبود روابط ترجیحی فازی B استفاده می‌کنیم. نتایج در جداول (۲-۲) تا (۲-۷) نمایش داده شده‌اند:

جدول ۲-۲ روابط ترجیح فازی و پارامترهای متناظر محاسبه شده از میانگین موزون هندسی در الگوریتم اول

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.500 0.448 0.407 0.454 0.552 0.500 0.488 0.547 0.593 0.512 0.500 0.579 0.546 0.453 0.421 0.500	0.204 0.270 0.298 0.228	0.002	0.154	0.098
0.3	1	0.500 0.482 0.405 0.418 0.518 0.500 0.513 0.559 0.595 0.487 0.500 0.608 0.582 0.441 0.392 0.500	0.203 0.271 0.299 0.227	0.014	0.118	0.076
0.5	1	0.500 0.516 0.404 0.382 0.484 0.500 0.538 0.571 0.596 0.462 0.500 0.635 0.618 0.429 0.365 0.500	0.203 0.271 0.299 0.227	0.039	0.084	0.053
0.7	1	0.500 0.550 0.402 0.349 0.450 0.500 0.563 0.582 0.598 0.437 0.500 0.662 0.651 0.418 0.338 0.500	0.204 0.271 0.298 0.227	0.076	0.050	0.032
0.9	3	0.500 0.555 0.402 0.344 0.445 0.500 0.567 0.585 0.598 0.433 0.500 0.666 0.656 0.415 0.334 0.500	0.204 0.271 0.298 0.227	0.083	0.045	0.028

جدول ۳-۲ روابط ترجیح فازی و پارامترها محاسبه شده از میانگین موزون حسابی در الگوریتم اول

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.2	1	0.500 0.475 0.406 0.444 0.525 0.500 0.506 0.554 0.594 0.494 0.500 0.601 0.556 0.446 0.399 0.500	0.208 0.269 0.299 0.224	0.008	0.144	0.085
0.4	1	0.500 0.513 0.404 0.414 0.487 0.500 0.534 0.567 0.596 0.466 0.500 0.631 0.586 0.433 0.369 0.500	0.210 0.270 0.300 0.220	0.028	0.114	0.062
0.6	1	0.500 0.546 0.403 0.381 0.454 0.500 0.558 0.578 0.597 0.442 0.500 0.658 0.619 0.422 0.342 0.500	0.210 0.270 0.300 0.220	0.059	0.081	0.041
0.8	2	0.500 0.553 0.403 0.377 0.447 0.500 0.563 0.582 0.597 0.437 0.500 0.666 0.623 0.418 0.337 0.500	0.211 0.271 0.300 0.219	0.066	0.077	0.037

جدول ٤-۲ روابط ترجیح فازی و پارامترهای متناظر محاسبه شده از میانگین موزون هندسی الگوریتم دوم

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.500 0.448 0.407 0.454 0.552 0.500 0.600 0.600 0.593 0.400 0.500 0.700 0.546 0.400 0.300 0.500	0.198 0.314 0.301 0.184	0.038	0.154	0.077
0.3	1	0.500 0.482 0.405 0.418 0.518 0.500 0.600 0.600 0.595 0.400 0.500 0.700 0.582 0.400 0.300 0.500	0.199 0.305 0.302 0.194	0.028	0.114	0.062
0.5	1	0.500 0.546 0.403 0.381 0.454 0.500 0.558 0.578 0.597 0.442 0.500 0.658 0.619 0.422 0.342 0.500	0.210 0.270 0.300 0.220	0.054	0.118	0.059
0.7	2	0.500 0.509 0.402 0.389 0.491 0.500 0.600 0.600 0.598 0.400 0.500 0.700 0.611 0.400 0.300 0.500	0.200 0.297 0.302 0.201	0.072	0.091	0.045
0.9	4	0.500 0.540 0.402 0.358 0.460 0.500 0.600 0.600 0.598 0.400 0.500 0.700 0.642 0.400 0.300 0.500	0.202 0.288 0.301 0.209	0.095	0.060	0.030

جدول ۵-۲ روابط ترجیح فازی و پارامترهای متناظر محاسبه شده از میانگین موزون حسابی الگوریتم دوم

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.500 0.444 0.407 0.446 0.556 0.500 0.600 0.600 0.593 0.400 0.500 0.700 0.554 0.400 0.300 0.500	0.196 0.315 0.301 0.188	0.039	0.156	0.076
0.3	1	0.500 0.471 0.405 0.403 0.529 0.500 0.600 0.600 0.595 0.400 0.500 0.700 0.597 0.400 0.300 0.500	0.194 0.307 0.302 0.197	0.056	0.129	0.058
0.5	1	0.500 0.502 0.404 0.367 0.498 0.500 0.600 0.600 0.596 0.400 0.500 0.700 0.633 0.400 0.300 0.500	0.194 0.298 0.301 0.207	0.077	0.098	0.042
0.7	2	0.500 0.490 0.400 0.369 0.510 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.700 0.631 0.400 0.300 0.500	0.191 0.301 0.303 0.206	0.072	0.110	0.046
0.9	4	0.500 0.521 0.400 0.343 0.479 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.700 0.657 0.400 0.300 0.500	0.193 0.292 0.302 0.213	0.095	0.079	0.032

جدول ۶-۲ روابط ترجیح فازی و پارامترهای متناظر محاسبه شده از میانگین موزون هندسی الگوریتم سوم

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	3	0.500 0.469 0.400 0.454 0.531 0.500 0.507 0.600 0.600 0.495 0.500 0.700 0.546 0.400 0.300 0.500	0.204 0.278 0.331 0.187	0.022	0.154	0.079
0.3	3	0.500 0.494 0.400 0.418 0.506 0.500 0.524 0.600 0.600 0.476 0.500 0.700 0.582 0.400 0.300 0.500	0.202 0.277 0.326 0.195	0.038	0.118	0.062
0.5	4	0.500 0.461 0.400 0.382 0.539 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.653 0.608 0.400 0.347 0.500	0.189 0.311 0.286 0.213	0.044	0.139	0.060
0.7	6	0.500 0.475 0.400 0.383 0.525 0.500 0.569 0.600 0.600 0.431 0.500 0.700 0.617 0.400 0.300 0.500	0.191 0.294 0.312 0.203	0.055	0.125	0.054
0.9	12	0.500 0.501 0.400 0.358 0.499 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.690 0.642 0.400 0.310 0.500	0.192 0.298 0.299 0.211	0.077	0.099	0.041

جدول ۲-۷ روابط ترجیح فازی و پارامترهای متناظر محاسبه شده از میانگین موزون حسابی الگوریتم سوم

α	k	$H^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	3	0.500 0.473 0.400 0.446 0.527 0.500 0.507 0.600 0.600 0.493 0.500 0.700 0.554 0.400 0.300 0.500	0.203 0.277 0.331 0.189	0.024	0.146	0.076
0.3	3	0.500 0.503 0.400 0.403 0.497 0.500 0.528 0.600 0.600 0.472 0.500 0.700 0.597 0.400 0.300 0.500	0.202 0.275 0.324 0.199	0.046	0.103	0.056
0.5	4	0.500 0.477 0.400 0.367 0.523 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.656 0.633 0.400 0.344 0.500	0.190 0.306 0.287 0.217	0.054	0.123	0.052
0.7	6	0.500 0.496 0.400 0.370 0.504 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.675 0.630 0.400 0.325 0.500	0.194 0.301 0.293 0.212	0.065	0.104	0.045
0.9	16	0.500 0.502 0.400 0.364 0.498 0.500 0.600 0.600 0.600 0.400 0.500 0.692 0.636 0.400 0.308 0.500	0.193 0.298 0.299 0.209	0.075	0.098	0.042

٦-۱-۲ تجزیه و تحلیل یک مثال

مثال ۲-۲ در یک مسئله *MADM*، چهار شاخصه $u_i\,(i=1,2,3,4)$ وجود دارند. برای تعیین وزن هر یک، تصمیم‌گیرنده از مقیاس *0.1-0.9* برای مقایسه هرجفت از شاخصه‌ها استفاده کرده است. لذا، رابطه ترجیحی فازی زیر را تشکیل می‌دهد:

$$B=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(۱) اگر از روش انتقال برای محاسبه بردار اولویت B استفاده کنیم، آنگاه:

$$w=(0.3000,\ 0.2333,\ 0.2667,\ 0.2000)$$

(۲) اگر از روش کمینه پراکندگی استفاده کنیم:

$$w=(0.4000,\ 0.2000,\ 0.3000,\ 0.1000)$$

(۳) اگر از روش کمینه انحراف استفاده کنیم:

$$w=(0.4302,\ 0.1799,\ 0.2749,\ 0.1150)$$

(۴) اگر از روش بردار ویژه استفاده کنیم:

$$w=(0.4303,\ 0.1799,\ 0.2748,\ 0.1150)$$

آنگاه نرخ سازگاری برابر $CR=0.0091<0.1$ است.

از نتایج فوق، مشاهده می‌شود که اختلاف میان نتایج حاصل از روش انتقال کمتر از روش کمینه پراکندگی، روش کمینه انحراف و روش بردار ویژه است. این در حالی است که نتایج بدست آمده از سه الگوریتم دیگر بسیار به هم شبیه هستند، ولی رتبه‌بندی حاصل از هر چهار روش دقیقاً مانند یکدیگر و به صورت زیر است:

$$u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4$$

نتایج نرخ سازگاری CR نشان می‌دهد که رابطه ترجیحی فازی B دارای نرخ سازگاری قابل قبولی است.

۲-۲ رابطه ترجیحی فازی ناقص[۱]

تصمیم‌گیرندگان معمولا هر جفت از n گزینه را با توجه به معیارهای معینی با یکدیگر مقایسه کرده و یک رابطه ترجیحی فازی کامل[۲] را تشکیل می‌دهند که به $\frac{1}{2}n(n-1)$ قضاوت در قسمت بالا مثلثی ماتریس مقایسه نیاز دارد. به هر حال، بعضاً تصمیم‌گیرندگان نمی‌توانند نظر خود را در مورد مقایسه زوجی برخی گزینه‌ها بیان نمایند. این مشکل خصوصاً برای روابط ترجیحی فازی با مرتبه بالا به دلایلی از قبیل: فشار زمان، کمبود دانش و تجربیات محدود تصمیم‌گیرندگان بروز می‌یابد. در این شرایط تصمیم‌گیرنده ممکن است رابطه ترجیحی فازی ناقصی را تشکیل دهد که برخی عناصر آن در دسترس نیستند (ژوو، (۲۰۰۴)[۳]). در این بخش رابطه ترجیحی فازی ناقص و اشکال ویژه‌اش مانند: رابطه ترجیحی فازی کاملاً ناقص[۴]، رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی/جمع‌پذیر[۵] ، رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه[۶] و رابطه ترجیحی فازی ناقص قابل قبول[۷] را بررسی خواهیم کرد. سپس، به معرفی یک روش اولویت‌بندی برای رابطه ترجیحی فازی ناقص پرداخته و موقعیتی که در آن اطلاعات کاملاً نامعلوم است، تحلیل خواهیم کرد.

---

[1] Incomplete Fuzzy Preference Relation
[2] Complete Fuzzy Preference Relation
[3] Xu (2004e)
[4] Totally Incomplete Fuzzy Preference Relation
[5] Additive Consistent Incomplete Fuzzy Preference Relation
[6] Multiplicative Consistent Incomplete Fuzzy Preference Relation
[7] Acceptable Incomplete Fuzzy Preference Relation

توضیح ۲-۲ روابط ترجیحی فازی که تمامی عناصر آنها کاملاً شناخته شده‌اند را همچنان روابط ترجیحی فازی می‌نامیم.

تعریف ۲-٦ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، حال اگر برخی از عناصر در C موجود نباشند، C یک رابطه ترجیحی فازی ناقص نامیده می‌شود.

عناصر نامعلوم c_{ij} را با x نمایش می‌دهیم و عنصر متناظرش یعنی c_{ji} را "$1-x$" می‌نامیم. در اینجا Ψ را مجموعه تمام عناصر معلوم در رابطه ترجیحی فازی ناقص C در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲-۷ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی باشد، اگر عناصر قطر اصلی C همگی برابر 0.5 باشند و باقی عناصر نامعلوم باشند، C را رابطه ترجیحی فازی کاملاً ناقص می‌نامیم.

با استفاده از تعریف رابطه ترجیحی فازی ناقص، می‌توان نشان داد قضایای زیر برقرار هستند:

قضیه ۲-۲۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص باشد. مجموع تمام عناصر موجود در C برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=\frac{n^2}{2}$$

تعریف ۲-۸ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی ناقص باشد. حال گراف جهت‌دار[2] این رابطه یعنی $G(C)=(N,\,E)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N=\{1,\,2,\,\ldots,\,n\},\qquad E=\{(i,\;j)\,|\,c_{ij}\in\Psi\}$$

[1] Xu (2004e)
[2] Directed Graph

که در آن N مجموعه گره‌ها، E مجموعه یالهای جهت‌دار و c_{ij} موجودیت یال $(i,\ j)$ مستقیم است.

تعریف ۹-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)[۱]) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را یک بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. عناصر c_{ij} و c_{kl} را عناصر مجاور می‌نامند، اگر $(i,\ j)\bigcap(k,\ l)\neq\phi$ باشد که ϕ بیانگر مجموعه تهی است. برای c_{ij} نامعلوم، اگر عناصر مجاور معلوم $c_{ij_1},\ c_{j_1j_2},\ ...,\ c_{j_kj}$ وجود داشته باشند، آنگاه c_{ij} بطور غیرمستقیم در دسترس است که دسترسی غیرمستقیم[۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر هر عنصر نامعلوم بتواند توسط عناصر معلوم مجاور خود تعیین شود، C قابل قبول نامیده می‌شود، در غیراینصورت C را غیرقابل قبول می‌نامند.

تعریف ۱۱-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) در گراف جهت‌دار $G(C)=(N,\ E)$، اگر هر جفت از گره‌ها در دسترس باشند، آنگاه $G(C)$ را گراف قویاً متصل[۳] می‌نامند.

قضیه ۲۳-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) رابطه ترجیحی فازی ناقص $C=(c_{ij})_{n\times n}$ قابل قبول نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار $G(C)$ قویاً متصل باشد.

اثبات (**شرط کافی**) اگر $G(C)$ قویاً متصل باشد، آنگاه برای هر عنصر نامعلوم c_{ij}، باید یک یال وجود داشته باشد که گره‌های i و j را به یکدیگر متصل کند، به عبارتی:

$$i\rightarrow j_1\rightarrow j_2\rightarrow\cdots\rightarrow j_k\rightarrow j$$

و دنباله‌ای از عناصر معلوم وجود دارند: $c_{ij_1},\ c_{j_1j_2},\ ...,\ c_{j_kj}$. بنابراین، C قابل قبول است.

(**شرط لازم**) اگر $C=(c_{ij})_{n\times n}$ قابل قبول باشد، آنگاه طبق تعریف (۲-۱۱)، هر عنصر نامعلومی از C می‌تواند توسط عناصر معلوم محاسبه شود. به عبارتی برای هر عنصر نامعلوم c_{ij}، باید

[1] Xu (2004e)
[2] Available Indirectly
[3] Strong Connected

دنباله‌ای از عناصر معلوم $c_{ij_1}, c_{j_1 j_2}, \ldots, c_{j_k j}$ وجود داشته باشد، به طوری که یک یال متصل میان گره‌های i و j موجود باشد. یعنی:

$$i \to j_1 \to j_2 \to \cdots \to j_k \to j$$

یعنی جفت گره‌های i و j در دسترس هستند. بنابراین، گراف جهت‌دار $C=(c_{ij})_{n\times n}$ قویاً متصل است. لذا، قضیه اثبات می‌گردد.

قضیه ۲۴-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر i امین سطر و i امین ستون را از C حذف کنیم، آنگاه رابطه ترجیحی C' که از باقیمانده رابطه C تشکیل می‌شود و دارای *(n-1)* سطر و *(n-1)* ستون از C است، نیز رابطه ترجیحی فازی یا یک رابطه ترجیحی فازی ناقص است.

اثبات (۱) اگر تمام عناصر نامعلوم در سطر و ستون حذف شده باشند، آنگاه تمامی عناصر موجود در C' گره‌های معلوم هستند و برای هر $c'_{ij} \in C'$، این اصل وجود دارد که $c'_{ij}+c'_{ji}=1$ است، $c'_{ii}=0.5$ و $c'_{ij}\geq 0$ است. بنابراین، C' یک رابطه ترجیحی فازی است.

(۲) اگر برخی از عناصر نامعلوم C در سطر و ستون حذف شده قرار بگیرند و سایر عناصر معلوم، درون بقیه سطر و ستون‌ها باقی بمانند، یا تمام عناصر نامعلوم درون بقیه سطر و ستون‌های C باقی بمانند، آنگاه C' حاصل شده همچنان حاوی عناصر نامعلوم است و عناصر معلوم در C' شروط $c'_{ij}+c'_{ji}=1$، $c'_{ii}=0.5$ و $c'_{ij}\geq 0$ را برآورده می‌سازند. بنابراین، C' همچنان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص است، که قضیه اثبات می‌شود.

[1] Xu (2004e)

تعریف ۱۲-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید:

(۱) اگر $c_{ij}^{T}=c_{ji}$ باشد، آنگاه $C^{T}=(c_{ij}^{T})_{n\times n}$ ماتریس ترانهاده[2] C نامیده می‌شود.

(۲) اگر $\bar{c}_{ij}=1-c_{ij}$ باشد، آنگاه $\bar{C}=(\bar{c}_{ij})_{n\times n}$ ماتریس مکمل[3] C نامیده می‌شود.

قضیه ۲۵-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس ترانهاده C^{T} و ماتریس مکمل $\bar{C}$ منتجه از رابطه ترجیحی فازی ناقص $C=(c_{ij})_{n\times n}$ اولاً یکسان هستند و ثانیاً هر دو روابط ترجیحی فازی ناقص هستند.

اثبات (۱) $C^{T}=(c_{ij}^{T})_{n\times n}$ و $\bar{C}=(\bar{c}_{ij})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید. طبق تعریف (۲-۱۲) داریم:

$$c_{ij}^{T}=c_{ji}=1-c_{ij}=\bar{c}_{ij}$$

به عبارتی: $C^{T}=\bar{C}$ است.

(۲) از آنجاکه ترانهاده‌های عناصر نامعلوم در رابطه ترجیحی فازی ناقص C نیز عناصر نامعلوم هستند و ترانهاده‌های عناصر معلوم C نیز همچنان معلوم هستند، پس:

$$c_{ij}^{T}=c_{ji}\geq 0\ ,\ \ c_{ii}^{T}=c_{ii}=0.5\ ,\ \ c_{ij}^{T}=c_{ji}=c_{ji}+c_{ij}=1$$

بنابراین، C^{T} یک رابطه ترجیحی فازی ناقص است و بر اساس (۱) می‌دانیم که $\bar{C}$ نیز یک رابطه ترجیحی فازی ناقص است. بنابراین، اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۱۳-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. حال اگر نامعادله زیر برقرار باشد:

---

[1] Xu (2004e)
[2] Transpose Matrix
[3] Supplement Matrix

$$c_{ik} + c_{kj} \geq c_{ij},\ \ for\ any\ \ c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$$

آنگاه گوییم C شرط مثلثی را برآورده می‌سازد.

تعریف ۲-۱٤ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) ماتریس $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. آنگاه برای تمام $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$ داریم:

$$c_{ik} \geq 0.5,\ c_{kj} \geq 0.5 \Rightarrow c_{ij} \geq 0.5$$

در این حالت گوییم C ویژگی تراگذاری ضعیف[2] را برآورده می‌سازد.

تعریف ۲-۱۵ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر برای هر $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$ داشته باشیم $c_{ij} \geq \min\{c_{ik}, c_{kj}\}$، آنگاه گوییم C ویژگی تراگذاری بیشینه-کمینه[3] را برآورده می‌سازد.

تعریف ۲-۱٦ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر برای هر $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$ داشته باشیم $c_{ij} \geq \max\{c_{ik}, c_{kj}\}$، آنگاه گوییم C ویژگی تراگذاری بیشینه-بیشینه[4] را برآورده می‌سازد.

تعریف ۲-۱۷ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم:

$$c_{ik} \geq 0.5,\quad c_{kj} \geq 0.5 \Rightarrow\ c_{ij} \geq \min\{c_{ik}, c_{kj}\}$$

آنگاه گوییم C ویژگی محدود تراگذاری بیشینه-کمینه را برآورده می‌سازد.

---

[1] Xu (2004e)
[2] Weak Transitivity
[3] Max-min Transitivity
[4] Max-Max Transitivity

تعریف ۱۸-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) ماتریس $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید. اگر

$$c_{ij} \geq \max\{c_{ik}, c_{kj}\} \; c_{kj} \geq 0.5 \Rightarrow c_{ik} \geq 0.5$$

آنگاه گوییم C ویژگی محدود تراگذاری بیشینه-بیشینه را برآورده می‌سازد.

تعریف ۱۹-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی ناقص است. اگر تساوی $c_{ik}c_{kj}c_{ji}=c_{ki}c_{ij}c_{jk}$ برقرار باشد، آنگاه C رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) گیریم $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی ناقص باشد. اگر $c_{ij}=c_{ik}-c_{ji}+0.5$ باشد، آنگاه C رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی نامیده می‌شود.

قضیه ۲۶-۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی فازی ناقص باشد.

(۱) اگر C شرط مثلثی را برآورده سازد، آنگاه ماتریسهای ترانهاده و مکمل یعنی C^T و $\overline{C}$ نیز شرط مثلثی را برآورده می‌کنند.

(۲) اگر C رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه باشد، آنگاه ترانهاده و مکمل C نیز رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه هستند.

(۳) اگر C یک رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی باشد، آنگاه ترانهاده و مکمل C نیز روابط ترجیحی فازی ناقص جمع‌پذیر هستند.

اثبات (۱) از آنجاکه $C=(c_{ij})_{n\times n}$ شرط مثلثی را برآورده می‌کند. به عبارتی برای هر $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$ داریم $c_{ik}+c_{kj} \geq c_{ij}$. از این رو، برای هر $c_{ik}^T, c_{kj}^T, c_{ij}^T \in \Psi$ داریم:

$$c_{ik}^T + c_{kj}^T = c_{ki} + c_{jk} = c_{jk} + c_{ki} \geq c_{ji} = c_{ij}^T$$

بنابراین، ترانهاده C شرط مثلثی را برآورده می‌کند. طبق برابری ترانهاده و مکمل C، می‌بینیم که مکمل C نیز شرط مثلثی را برآورده می‌سازد.

(۲) از آنجاکه C یک رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه است. به عبارتی برای هر $c_{ik}, c_{kj}, c_{ij} \in \Psi$ داریم $c_{ik}c_{kj}c_{ji} = c_{ki}c_{ij}c_{jk}$، پس برای هر $c_{ik}^T, c_{kj}^T, c_{ij}^T \in \Psi$ داریم:

$$c_{ik}^T c_{kj}^T c_{ji}^T = c_{ki}c_{jk}c_{ij} = c_{ki}c_{ij}c_{jk} = c_{ik}c_{kj}c_{ji} = c_{kj}^T c_{ij}^T c_{jk}^T$$

بنابراین، ترانهاده و مکمل C نیز روابط ترجیحی فازی ناقص سازگار چندگانه هستند.

(۳) از آنجاکه C یک رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی است. به عبارتی برای هر $c_{ik}, c_{jk}, c_{ij} \in \Psi$ داریم $c_{ij} = c_{ik} - c_{jk} + 0.5$، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} c_{ij}^T &= c_{ji} = 1 - c_{ij} = 1 - (c_{ik} - c_{jk} + 0.5) \\ &= (1 - c_{ik}) - (1 - c_{jk}) + 0.5 \\ &= c_{ki} - c_{kj} + 0.5 \\ &= c_{ik}^T - c_{jk}^T + 0.5 \end{aligned}$$

بنابراین، ترانهاده و مکمل C نیز روابط ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی هستند، که اثبات کامل می‌شود. ماتریس $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را بعنوان یک رابطه ترجیحی فازی ناقص در نظر بگیرید و $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ را بعنوان بردار اولویت C در نظر بگیرید که دارای شروط $w_j \geq 0$ به ازای هر j و نیز $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ می‌باشد. حال اگر:

$$c_{ij} = \alpha(w_i - w_j) + 0.5, \;\; 0 < \alpha < 1, \;\;\; for\ any \;\;\; c_{ij} \in \Psi \qquad (۲-۶۱)$$

آنگاه برای هر $c_{ij}, c_{ik}, c_{jk} \in \Psi$ داریم $c_{ij} = c_{ik} - c_{jk} + 0.5$. بنابراین، C یک رابطه ترجیحی فازی ناقص سازگار افزایشی است. در حالت کلی، ما مقدار $\alpha = 0.5$ را در نظر می‌گیریم. در حقیقت با استفاده از $0 \leq c_{ij} \leq 1$ و معادله (۲-۶۱) داریم:

$$-0.5 \leq \alpha(w_i - w_j) \leq 0.5 \qquad (۲-۶۲)$$

از آنجاکه $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ است، پس:

$$-1 \leq w_i - w_j \leq 1 \qquad (۲-۶۳)$$

با ترکیب معادلات (۲-۶۲) و (۲-۶۳)، می‌دانیم که در نظر گرفتن مقدار $\alpha = 0.5$ مناسب است. اگر $\alpha = 0.5$ باشد، آنگاه معادله (۲-۶۱) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$c_{ij} = 0.5(w_i - w_j + 1) \qquad (۲-۶۴)$$

حالا در رابطه ترجیحی فازی $C = (c_{ij})_{n \times n}$ عناصر معلوم c_{ij} را با $0.5(w_i - w_j + 1)$ جایگزین می‌کنیم. به عبارتی از معادله (۲-۶۴) به منظور ایجاد ماتریس کمکی $\dot{C} = (\dot{c}_{ij})_{n \times n}$ بهره می‌گیریم که:

$$\dot{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & c_{ij} \neq x \\ 0.5(w_i - w_j + 1), & c_{ij} = x \end{cases}$$

مثال ۳-۲ فرض کنید

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & x \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 1-x & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

آنگاه ماتریس کمکی به شکل زیر است:

$$\dot{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.5(w_1 - w_3 + 1) \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5(w_3 - w_1 + 1) & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

با استفاده از فرمول نرمال‌سازی داریم:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}}{\frac{n^2}{2}}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۲-۶۵)$$

که به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{0.5+0.4+0.5(w_1 - w_3 + 1)}{4.5} \\ w_2 = \dfrac{0.6+0.5+0.7}{4.5} \\ w_2 = \dfrac{0.5(w_3 - w_4 + 1)+0.3+0.5}{4.5} \end{cases}$$

که از آن، مقادیر اوزان را به شکل $w_1 = 0.31$ ، $w_2 = 0.40$ و $w_3 = 0.29$ بدست می‌آوریم. پس بردار اولویت C برابر خواهد بود با:

$$w = (0.31,\ 0.40,\ 0.29)$$

بر اساس این ایده، در زیر روشی را برای بدست آوردن بردار اولویت یک رابطه ترجیحی فازی ناقص معرفی خواهیم کرد (ژوو، (۲۰۰۴)[1]):

گام ۱) در یک مسئله تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرنده از مقیاس ۱–۰ جهت مقایسه زوج اشیاء (گزینه‌ها یا شاخصه‌ها) استفاده می‌کند، سپس رابطه ترجیحی فازی ناقص $C = (c_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهد. عنصر نامعلوم c_{ij} در C با x نشان داده می‌شود و عنصر متناظر c_{ji} آن با $1\text{-}x$ نمایش داده می‌شود.

گام ۲) ماتریس کمکی $\dot{C} = (\dot{c}_{ij})_{n\times n}$ را از روی $C = (c_{ij})_{n\times n}$ تشکیل می‌دهیم که به شکل زیر است:

$$\dot{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & c_{ij} \neq x \\ 0.5(w_i - w_j + 1), & c_{ij} = x \end{cases}$$

گام ۳) از معادله (۲–۶۵) به منظور تشکیل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم که از آن بردار اوزان $w = (w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n)$ برای رابطه C بدست می‌آید.

[1] Xu (2004e)

در موارد خاص اگر تصمیم‌گیرنده نتواند هیچ اطلاعات مقایسه‌ای فراهم نماید، به نتیجه زیر می‌رسیم:

قضیه ۲-۲۷ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) اگر $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی کاملاً ناقص[2] باشد، آنگاه بردار اولویت رابطه C که از روش فوق بدست می‌آید به شکل زیر است:

$$w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$$

اثبات از آنجا که $C=(c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی کاملاً ناقص است، پس ماتریس کمکی $\dot{C}=(\dot{c}_{ij})_{n\times n}$ متناظر با آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\dot{c}_{ij}=\begin{cases}0.5, & i=j\\ 0.5(w_i-w_j+1), & i\neq j\end{cases}$$

با استفاده از معادله (۲-۶۵)، به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم:

$$w_i=\frac{0.5+\sum_{j\neq i}0.5(w_i-w_j+1)}{\frac{n^2}{2}},\quad i=1,2,\ldots,n$$

که به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}n^2w_i&=n+(n-1)w_i-\sum_{j\neq i}w_j=n+(n-1)w_i-(1-w_i)\\&=n+nw_i-1,\quad i=1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

به عبارتی:

$$w_i=\frac{1}{n},\ i=1,2,\ldots,n$$

[1] Xu (2004e)
[2] Totally Incomplete Fuzzy Preference Relation

بنابراین، بردار اولویت برای C برابر $w=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ است، که اثبات کامل می‌گردد. ذکر این نکته هم خالی از لطف نیست که مردم وقتی هیچ اطلاعاتی برای قضاوت در مورد مقایسه اشیاء ندارند معمولا اوزان آنها را برابر می‌گیرند. با این اوصاف می‌توان گفت نتیجه قضیه (۲-۲۷) با این وضعیت عملی کاملاً همخوانی دارد.

۲-۳ روش برنامه‌ریزی آرمانی خطی برای اولویت‌بندی یک رابطه ترجیحی مرکب[1]

در ادامه، برای موقعیتهایی که تصمیم‌گیرنده انواع مختلفی از ترجیح را بیان می‌دارد مفهوم رابطه ترجیحی مرکب و رابطه ترجیحی مرکب سازگار[2] و سپس روش برنامه‌ریزی آرمانی خطی[3] را برای تعیین بردار اولویت‌بندی برای یک رابطه ترجیحی مرکب تشریح می‌گردد.

تعریف ۲-۲۱ (ژوو و دا، (۲۰۰۲)[4]) ماتریس C یک رابطه ترجیحی مرکب سازگار نامیده می‌شود، اگر رابطه اطلاعات ترجیحی چندگانه آن معادله $c_{ij}=c_{ik}c_{kj}$ را ارضاء کند و اطلاعات ترجیحی فازی آن نیز در رابطه $c_{ik}c_{kj}c_{ji} = c_{ki}c_{jk}c_{ij}$ صدق کند.

فرض کنید $H=(h_{ij})_{n\times n}$ بردار اولویت رابطه ترجیحی چندگانه $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ باشد؛ که در آن $\gamma_j > 0$ و $\sum_{j=1}^{n}\gamma_j=1$ است. اگر $H=(h_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی سازگار چندگانه باشد، به عبارتی برای هر i, j, k داشته باشیم $h_{ij}=h_{ik}h_{kj}$، آنگاه:

---

[1] Hybrid Preference Relation
[2] Consistent Hybrid Preference Relation
[3] Linear Goal Programming Method
[4] Xu and Da (2002a)

$$h_{ij} = \frac{\gamma_i}{\gamma_j}\ ,\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

$w = (w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)$ را بعنوان بردار اولویت رابطه ترجیحی فازی $B = (b_{ij})_{n\times n}$ در نظر بگیرید؛ که در آن $w_i > 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ است، آنگاه:

$$b_{ij} = \frac{w_i}{w_i + w_j}\ ,\quad i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

به عبارتی

$$b_{ji} w_i = b_{ij} w_j\ ,\quad i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

برای یک رابطه ترجیحی مرکب $C = (c_{ij})_{n\times n}$، بردار $v = (v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n)$ را بعنوان بردار اولویت ماتریس C در نظر بگیرید؛ که $v_i > 0$ و $\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$ است. I_i را زیرمجموعه ستونهایی در نظر بگیرید که اطلاعات ترجیحی چندگانه i امین سطر C در آن قرار دارد و J_i را زیرمجموعه‌ای از ستونهایی در نظر بگیرید که اطلاعات ترجیحی فازی i امین سطر C در آن قرار دارد که در آن $I_i \cup J_i = N$ است. حال اگر $C = (c_{ij})_{n\times n}$ یک رابطه ترجیحی مرکب سازگار باشد، آنگاه اطلاعات ترجیحی چندگانه C در رابطه $c_{ij} = \frac{v_i}{v_j}$ به ازای $j \in I_i$ صدق می‌کند، به عبارتی:

$$v_i = c_{ij} v_j\ ,\quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n,\quad j \in I_i \tag{۲-۶۶}$$

و اطلاعات ترجیح فازی C نیز در رابطه $c_{ij} = \frac{v_i}{v_i + v_j}$ به ازای $j \in J_i$ صدق می‌کند، به عبارتی:

$$c_{ji} v_i = c_{ij} v_j\ ,\quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n,\quad j \in J_i \tag{۲-۶۷}$$

با در نظر گرفتن این موضوع که رابطه ترجیحی مرکب فراهم شده توسط تصمیم‌گیرنده عموماً ناسازگار است. به عبارتی، معادلات (۲-۶۶) و (۲-۶۷) معمولاً صادق نیستند. بنابراین، تابع انحراف زیر را معرفی می‌کنیم:

$$f_{ij} = | v_i - c_{ij} v_j |, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j \in I_i$$
$$f_{ij} = | c_{ji} v_i - c_{ij} v_j |, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j \in J_i$$

بدیهی است که به منظور حصول بردار اولویت مناسب $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$، مقادیر تابع انحراف فوق باید حتی‌الامکان کوچک باشند. در نتیجه، مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-2.1)} \begin{cases} \min \ f_{ij} = | c_{ji} v_i - c_{ij} v_j |, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in I_i \\ \min \ \ f_{ij} = | c_{ji} v_i - c_{ij} v_j |, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in J_i \\ s.t. \quad v_j > 0, \ \ j = 1, 2, ..., n, \ \sum_{j=1}^{n} v_j = 1 \end{cases}$$

برای حل مدل فوق *(M-2.1)*، با فرض اینکه تمامی توابع هدف f_{ij} منصفانه هستند، می‌توان مدل را به مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی زیر تبدیل کرد (ژوو و دا، (۲۰۰۲)[1]):

$$\textbf{(M-2.2)} \begin{cases} \min \ J = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (s_{ij} d_{ij}^{+} + t_{ij} d_{ij}^{-}) \\ s.t. \ \ v_i - c_{ij} v_j - d_{ij}^{+} + d_{ij}^{-} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in I_i, \ \ i \neq j \\ \qquad c_{ji} v_i - c_{ij} v_j - d_{ij}^{+} + d_{ij}^{-} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in J_i, \ \ i \neq j \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} v_j = 1, \qquad\qquad v_j > 0, \ \ j = 1, 2, ..., n \\ \qquad d_{ij}^{+} \geq 0, \ \ d_{ij}^{-} \geq 0, \qquad\qquad i, \ j = 1, 2, ..., n, \ \ i \neq j \end{cases}$$

که در مدل فوق d_{ij}^{+} میزان انحراف مثبت از تابع هدف f_{ij} است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}^{+} = (v_i - c_{ij} v_j) \vee 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in I_i, \ \ i \neq j$$
$$d_{ij}^{+} = (c_{ji} v_i - c_{ij} v_j) \vee 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in J_i, \ \ i \neq j$$

---

[1] Xu and Da (2002a)

همچنین d_{ij}^- میزان انحراف منفی از تابع هدف f_{ij} است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}^- = (c_{ij}v_j - v_i) \vee 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in I_i, \ \ i \neq j$$
$$d_{ij}^- = (c_{ij}v_j - c_{ji}v_i) \vee 0, \quad i = 1, 2, ..., n, \ \ j \in J_i, \ \ i \neq j$$

s_{ij} عامل وزنی متناظر با انحراف مثبت d_{ij}^+ و t_{ij} عامل وزنی متناظر با انحراف منفی d_{ij}^- است. با حل مدل *(M-2.2)* به بردار اولویت v رابطه ترجیح مرکب C می‌رسیم.

مثال ٤-۲ در یک مسئله *MADM*، چهار شاخصه $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$ وجود دارند، تصمیم‌گیرنده شاخصه‌ها را در مقیاس *0.1-0.9* و نیز مقیاس *0-9* به صورت زوجی با یکدیگر مقایسه می‌کند و رابطه ترجیحی مرکب زیر را تشکیل می‌دهد:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 0.9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0.7 & 5 \\ \frac{1}{7} & 0.3 & 1 & 3 \\ 0.1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

اگر $s_{ij} = t_{ij} = 1$ را در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان بردار اولویت رابطه ترجیحی مرکب C را از طریق مدل بهینه‌سازی ارائه شده قبلی بدست آورد:

$$v = (0.6130, 0.2302, 0.1082, 0.0486)$$

٤-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر عملگرهای *WA* و *CWA*

مسئله *MADM* را در حالتی در نظر بگیرید که تنها یک تصمیم‌گیرنده وجود دارد. تصمیم‌گیرنده با استفاده از رابطه ترجیحی فازی وزن اطلاعات را روی شاخصه‌ها تعیین می‌نماید. می‌توان با استفاده از روش فوق،

وزن شاخصه‌ها را بدست آورد، سپس از عملگر WA برای تلفیق اطلاعات تصمیم استفاده کرده است که بر اساس آن می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی کرد.

در ادامه، برای حالتی که تصمیم‌گیری به صورت گروهی انجام می‌شود، یک روش $MAGDM$ مبتنی بر عملگرهای WA و CWA بیان خواهیم کرد:

گام ۱) یک مسئله $MADM$ را در نظر بگیرید، فرض کنید در این مسئله، t تصمیم‌گیرنده با بردار وزن $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_t)$ وجود دارند و تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ از رابطه ترجیحی فازی B_k برای بیان اطلاعات وزن روی شاخصه‌ها استفاده می‌نماید. به علاوه، تصمیم‌گیرنده d_k مقادیر شاخصه‌های $a_{ij}^{(k)}$ را بر روی گزینه x_i با در نظر گرفتن شاخصه u_j تعیین می‌کند، که نتیجه آن ماتریس تصمیم $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ خواهد شد. اگر ابعاد شاخصه‌ها متفاوت باشد، باید ماتریس A را به فرم نرمال $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ تبدیل نمود.

گام ۲) از روش اولویت‌بندی متناسبی استفاده کرده و بردار وزن مربوط به رابطه ترجیحی فازی داده شده توسط هر تصمیم‌گیرنده را محاسبه نمایید. به عبارتی برای بدست آوردن بردار وزن $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, ..., w_m^{(k)})$ از اطلاعات وزنی شاخصه‌ها که توسط هر تصمیم‌گیرنده بیان شده است، استفاده نمائید.

گام ۳) از عملگر WA بمنظور تلفیق مقادیر شاخصه‌ها در i امین سطر ماتریس تصمیم R_k استفاده کرده و جهت محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^{(k)})$ برای گزینه‌های x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k به شکل زیر استفاده کنید:

$$z_i(w^{(k)}) = WA_{w^{(k)}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) = \sum_{j=1}^{m} w_j^{(k)} r_{ij}^{(k)},\ \ i=1, 2, ..., n,\ \ k=1, 2, ..., t$$

گام ٤) از عملگر CWA برای تجمیع مقادیر کلی شاخصه‌ها برای t تصمیم‌گیرنده استفاده کرده و مقادیر کلی تجمیعی (مقادیر تجمیعی از نظرات تصمیم‌گیرندگان) را برای گزینه‌های x_i به شکل زیرمحاسبه کنید:

$$z_i(\lambda, \omega) = CWA_{\lambda,w}(z_i\,(w^{(1)}),\, z_i\,(w^{(2)}),\, ...,\, z_i\,(w^{(t)})) \\ = \sum_{k=1}^{t} \omega_k b_i^{(k)},\;\; i = 1, 2, ..., n$$

که در رابطه فوق $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزنی مربوط به عملگر CWA است و در آن $\omega_k \in [0, 1]$ ، $\sum_{k=1}^{t} \omega_k = 1$ و $b_i^{(k)}$ ، kامین مقدار بزرگ در $(t\lambda_1 z_i\,(w^{(1)}), t\lambda_2 z_i\,(w^{(2)}), ..., t\lambda_t z_i\,(w^{(t)})$ است و t نیز ضریب تعادل است.

۲-۵ مثال کاربردی

یک سیستم پشتیبان نگهداری و تعمیرات تجهیزات متشکل از یک سری عوامل پشتیبانی بمنظور یکپارچه‌سازی و بهینه‌سازی را در نظر بگیرید (نظیر: منابع موجودیها، نیروی انسانی، منابع اطلاعاتی و ابزارهای مدیریتی). شاخص کارایی سیستم بصورت آن اندازه یا درجه‌ای که سیستم می‌تواند نیازمندی گروه خاصی از فعالیتها را برآورده سازد تعریف شده است، که تابعی از اثربخشی، قابلیت اطمینان و ظرفیت سیستم می‌باشد. معیارها و یا شاخصه‌های استفاده شده جهت اندازه‌گیری کارایی سیستم پشتیبان نگهداری و تعمیرات عبارتند از (موو و همکاران، (۲۰۰۳)[1]): (۱) u_1: کارایی فنی؛ (۲) u_2: کارایی مدیریتی؛ (۳) u_3: کارایی تعمیر تجهیزات؛ (۴) u_4: کارایی ابزار، تجهیزات و امکانات تعمیراتی؛ (۵) u_5: کارایی اطلاعات فنی؛ (۶) u_6: عملکرد نرم‌افزار؛ (۷) u_7: اثربخشی مدیریت مالی و (۸) u_8: اثربخشی مدیریت منابع. چهار تصمیم‌گیرنده $d_k \;(k = 1, 2, 3, 4)$ با بردار وزن $\lambda = (0.27, 0.23, 0.24, 0.26)$ در فرآیند تصمیم‌گیری دخیل هستند. آنها از مقیاس *0.1-0.9* و نیز مقیاس *0-9* به منظور مقایسه شاخصه‌ها به صورت دو به دو استفاده می‌کنند و سپس رابطه ترجیحی چندگانه B_1، رابطه ترجیحی فازی B_2، رابطه ترجیحی فازی ناقص B_3 و رابطه ترجیحی مرکب B_4 را به ترتیب تشکیل می‌دهند:

---

[1] Mu et al. (2003)

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 6 & \frac{1}{5} & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1 & 5 & \frac{1}{8} & 6 & 3 & 7 \\ 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 & 9 & 3 & \frac{1}{6} & 7 \\ 7 & \frac{1}{8} & 8 & \frac{1}{9} & 1 & 5 & 3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & \frac{1}{3} & 6 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 5 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 4 & \frac{1}{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.7 & 0.6 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$B_3=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & x & 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 1-x & 0.3 & 0.4 \\ 1-x & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & x & 0.4 \\ 0.3 & x & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 1-x & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 7 & 0.4 & 0.6 \\ \frac{1}{2} & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 8 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & \frac{1}{7} & 0.7 & 0.6 & 9 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & \frac{1}{8} & 7 & 0.1 & 0.5 & 6 & 0.6 & 0.4 \\ \frac{1}{7} & 0.4 & 0.3 & 0.4 & \frac{1}{6} & 0.5 & 8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & \frac{1}{8} & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & \frac{1}{9} & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}$$

همچنین، آنها سیستمهای پشتیبانی تعمیرات x_i را با در نظر گرفتن شاخصه‌ها ارزیابی نموده و مقادیر شاخصه $r_{ij}^{(k)}$ را با استفاده از سیستم صدگانی (اعداد در فاصله صفر تا صد) بیان کردند. نتایج محاسبه در ماتریسهای تصمیم R_k (جداول شماره (۲-۸)تا (۲-۱۱)) لیست شده است.

جدول ۸-۲ ماتریس تصمیم R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	85	90	95	60	70	80	90	85
x_2	95	80	60	70	90	85	80	70
x_3	65	75	95	65	90	95	70	85
x_4	75	75	50	65	95	75	85	80

جدول ۹-۲ ماتریس تصمیم R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	90	65	70	95	70	75
x_2	85	60	60	65	90	75	95	70
x_3	60	65	75	80	90	95	90	80
x_4	65	60	60	70	90	85	70	65

جدول ۱۰-۲ ماتریس تصمیم R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	85	60	85	80	60	75
x_2	80	75	60	90	85	65	85	80
x_3	95	80	85	85	90	90	85	95
x_4	60	65	50	60	95	80	65	70

جدول ۱۱-۲ ماتریس تصمیم R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	70	80	85	65	80	90	70	80
x_2	85	70	70	80	95	70	85	85
x_3	90	85	80	80	95	85	80	90
x_4	65	70	60	65	90	85	70	75

توضیح ۳-۲ از آنجاکه تمامی شاخصه‌ها از نوع سود هستند، از نظر بُعد نیز یکسان است، به منظور راحتی محاسبات، نیازی به نرمال‌سازی ماتریسها نیست.

در ادامه، از روش ارائه شده در قسمت (۲-۴) به منظور حل این مسئله استفاده می‌شود:

گام ۱) (۱) بردار اولویت B_1 را با استفاده از روش بردار ویژه بدست آوردید:

$$w^{(1)} = (0.1118, 0.1273, 0.1333, 0.1534, 0.1483, 0.0929, 0.1337, 0.0993)$$

(۲) از روش کمینه پراکندگی در رابطه ترجیحی فازی برای محاسبه بردار اولویت B_2 استفاده کنید:

$$w^{(2)} = (0.1375, 0.1500, 0.1500, 0.2000, 0.1250, 0.0875, 0.0875, 0.0625)$$

(۳) از روش اولویت‌بندی رابطه ترجیحی فازی ناقص استفاده کرده و بردار اولویت B_3 را محاسبه کنید:

$$w^{(3)} = (0.1247,\ 0.1283,\ 0.1440,\ 0.1438,\ 0.1156,\ 0.1186,\ 0.1156,\ 0.1094)$$

(۴) از روش برنامه‌ریزی آرمانی خطی در رابطه ترجیحی مرکب استفاده کرده و بردار اولویت B_4 را محاسبه کنید:

$$w^{(4)} = (0.1274,\ 0.1499,\ 0.1213,\ 0.1592,\ 0.1025,\ 0.0974,\ 0.1279,\ 0.1144)$$

گام ۲) از عملگر WA برای تلفیق مقادیر شاخصه‌های i امین سطر از ماتریس R_k استفاده کرده و مقادیر $z_i\,(w^{(k)})$ متناظر با تصمیم‌گیرنده d_k را محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} z_1\,(w^{(1)}) &= WA_{w^{(1)}}(r_{11}^{(1)},\ r_{12}^{(1)},\ \ldots,\ r_{18}^{(1)}) \\ &= 0.1118\times 85 + 0.1273\times 90 + 0.1333\times 95 + 0.1534\times 60 \\ &\quad + 0.1483\times 70 + 0.0929\times 80 + 0.1337\times 90 + 0.0993\times 85 \\ &= 81.1140 \end{aligned}$$

به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} &z_2(w^{(1)}) = 78.4315,\ z_3(w^{(1)}) = 79.4210,\ z_4(w^{(1)}) = 74.9330 \\ &z_1(w^{(2)}) = 73.8750,\ z_2(w^{(2)}) = 73.1875,\ z_3(w^{(2)}) = 77.6875 \\ &z_4(w^{(2)}) = 69.8125,\ z_1(w^{(3)}) = 72.4275,\ z_2(w^{(3)}) = 77.2935 \\ &z_3(w^{(3)}) = 87.8705,\ z_4(w^{(3)}) = 67.2915,\ z_1(w^{(4)}) = 76.6635 \\ &z_2(w^{(4)}) = 79.7255,\ z_3(w^{(4)}) = 85.2190,\ z_4(w^{(4)}) = 71.4595 \end{aligned}$$

گام ۳) از عملگر CWA بمنظور تجمیع مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i\,(w^{(k)})$ متناظر با هر تصمیم‌گیرنده برای گزینه‌های مسئله استفاده کنید (فرض کنید بردار وزنی برابر $\omega = \left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$ است):

ابتدا از $\lambda,\ t$ و $z_i\,(w^{(k)})$ برای بدست آوردن $t\lambda_k z_i\,(w^{(k)})$ استفاده می‌کنیم:

$$4\lambda_1 z_1(w^{(1)}) = 87.6031,\ 4\lambda_1 z_2(w^{(1)}) = 84.7060,\ 4\lambda_1 z_3(w^{(1)}) = 85.7747$$

$$4\lambda_1 z_4(w^{(1)}) = 80.9276\,,\; 4\lambda_2 z_1(w^{(1)}) = 67.9650\,,\; 4\lambda_2 z_2(w^{(2)}) = 67.3325$$
$$4\lambda_2 z_3(w^{(2)}) = 71.4725\,,\; 4\lambda_2 z_4(w^{(2)}) = 64.2275\,,\; 4\lambda_3 z_1(w^{(3)}) = 69.5304$$
$$4\lambda_3 z_2(w^{(3)}) = 74.2018\,,\; 4\lambda_3 z_3(w^{(3)}) = 84.3557\,,\; 4\lambda_3 z_4(w^{(3)}) = 66.5198$$
$$4\lambda_4 z_1(w^{(4)}) = 79.7300\,,\; 4\lambda_4 z_2(w^{(4)}) = 82.9145\,,\; 4\lambda_4 z_3(w^{(4)}) = 88.6278$$
$$4\lambda_4 z_4(w^{(4)}) = 74.3179$$

بنابراین، مقادیر تجمیعی شاخصه‌های سیستم روی چهار گزینه x_i برابر با مقادیر زیر است:

$$z_1(\lambda, \omega) = 75.6815\,,\; z_2(\lambda, \omega) = 77.7119$$
$$z_3(\lambda, \omega) = 83.3935\,,\; z_4(\lambda, \omega) = 71.1384$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را طبق مقادیر $z_i(\lambda, \omega)$ مرتب می‌کنیم و داریم:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$$

بنابراین x_3 بهترین گزینه است.

٦-٢ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر عملگرهای *WG* و *CWG*

در موقعیتی که فقط یک تصمیم‌گیرنده در مسئله وجود دارد و عناصر ماتریس تصمیم نرمال مثبت هستند، می‌توان از عملگر *WG* به منظور تجمیع اطلاعات تصمیم و سپس رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده نمود.

اما برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی در ادامه یک روش تصمیم‌گیری گروهی مبتنی بر عملگرهای *WG* و *CWG* معرفی خواهیم کرد (ژوو، (۲۰۰۲)[۱]):

[1] Xu (2002d)

گام ۱) در یک مسئله MAGDM، فرض کنید بردار وزن تصمیم‌گیرندگان $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است و تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ از رابطه ترجیحی فازی B_k برای بیان اطلاعات وزن روی شاخصه‌ها استفاده می‌کند. به علاوه، تصمیم‌گیرنده d_k مقادیر شاخصه $a_{ij}^{(k)}$ را روی گزینه‌های x_i با در نظر گرفتن u_j بیان می‌کند و سپس ماتریس تصمیم $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $a_{ij}^{(k)} > 0$ است. اگر ابعاد شاخصه‌ها متفاوت باشد، ماتریس تصمیم A_k را نرمال نموده و به ماتریس نرمال $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ می‌رسیم که در این ماتریس $r_{ij}^{(k)} > 0$ است.

گام ۲) از روش اولویت‌بندی متناظر هر ماتریس برای محاسبه بردار اولویت رابطه ترجیحی بیان شده توسط هر تصمیم‌گیرنده استفاده کنید. یعنی برای محاسبه بردار اوزان متناظر شاخصه‌ها از $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, ..., w_m^{(k)})$ های متناظر هر تصمیم‌گیرنده استفاده نمائید.

گام ۳) از عملگر WG به منظور تجمیع مقادیر شاخصه‌های i امین سطرح از ماتریس تصمیم R_k استفاده کرده و به مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i\,(w^{(k)})$ می‌رسیم، یعنی:

$$z_i\,(w^{(k)}) = WG_{w^{(k)}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) = \prod_{j=1}^{m} (r_{ij}^{(k)})^{w_j^{(k)}}$$
$$k = 1, 2, ..., t, \quad i = 1, 2, ..., n$$

گام ٤) از عملگر CWG برای تجمیع مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i\,(w^{(k)})$ روی گزینه‌های x_i متناظر با t تصمیم‌گیرنده استفاده کرده و به مقادیر تجمیعی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} z_i(\lambda, \omega) &= CWG_{\lambda,\omega}(z_i\,(w^{(1)}), z_i\,(w^{(2)}), ..., z_i\,(w^{(t)})) \\ &= \prod_{k=1}^{t} (b_i^{(k)})^{\omega_k}, \quad i = 1, 2, ..., n \end{aligned}$$

که $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزن نمایی مربوط به عملگر CWG، $\omega_k \in [0, 1]$ و $\sum_{k=1}^{t} \omega_k = 1$ است. همچنین، $b_i^{(k)}$، k امین مقدار بزرگ از $z_i\,(w^{(1)})^{t\lambda_1}, z_i\,(w^{(2)})^{t\lambda_2}, ..., z_i\,(w^{(t)})^{t\lambda_t}$ است و t نیز ضریب تعدیل است.

گام ۵) گزینه‌های x_i بر اساس مقادیر $z_i(\lambda, \omega)$ رتبه‌بندی کرده و بهترین آنها را انتخاب نمائید.

۲-۷ مثال کاربردی

مثال ۲-٦ چهار واحد عملیات نظامی $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ وجود دارند که عملکرد آنها باید طبق شش شاخصه ارزیابی شود: (۱) u_1: تحصیلات سیاسی، (۲) u_2: آموزش نظامی، (۳) u_3: نظم و هدایت، (۴) u_4 مدیریت تجهیزات، (۵) u_5: لجستیک، (۶) u_6: مدیریت ایمنی. فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده $d_k (k=1, 2, 3)$ با بردار وزنی $\lambda = (0.33, 0.34, 0.33)$ وجود دارند و از مقیاس *0.1-0.9* و نیز *1-9* به منظور مقایسه جفت شاخصه‌های $u_j (j=1, 2, ..., 6)$ استفاده می‌کنند و سپس رابطه ترجیحی چندگانه H، رابطه ترجیحی فازی B و رابطه ترجیحی فازی ناقص C را به شکل زیر تشکیل می‌دهند:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{6} & 7 & \frac{1}{4} & 8 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 & 5 & \frac{1}{6} & 7 \\ 6 & \frac{1}{4} & 1 & 6 & \frac{1}{5} & 8 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.8 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & x & 0.7 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & x & 0.9 \\ 1-x & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.6 & 1-x \\ 0.5 & 1-x & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & x & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$$

به علاوه آنها این چهار واحد عملیات نظامی x_i را با توجه به شاخصه‌های u_j ارزیابی می‌کنند و مقادیر $r_{ij}^{(k)}$ را با استفاده از سیستم صدگانی تشکیل می‌دهند که در ماتریسهای تصمیم R_k قرار گرفته‌اند (جداول شماره (۲-۱۲) تا (۲-۱۴)).

توضیح ٤-۲ از آنجاکه تمام شاخصه‌ها از نوع سود هستند و ابعاد این شاخصه‌ها نیز یکسان است، به منظور سهولت محاسبات نیازی به نرمال‌سازی ماتریسهای تصمیم نیست.

جدول ۲-۱۲ ماتریس تصمیم R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	70	80	85	75	90	80
x_2	90	80	70	60	95	70
x_3	65	75	70	85	90	95
x_4	75	70	60	60	95	90

جدول ۲-۱۳ ماتریس تصمیم R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	80	65	95	60	80	90
x_2	65	70	90	95	70	65
x_3	70	75	95	90	70	75
x_4	85	90	65	75	95	75

جدول ۱۴-۲ ماتریس تصمیم R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	75	85	95	75	80	95
x_2	95	80	70	60	95	75
x_3	65	95	85	80	95	90
x_4	85	80	90	60	90	85

در ادامه، از روش ارائه شده در قسمت (۲-۶) به منظور حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

گام ۱) (۱) از روش بردار ویژه برای محاسبه بردار اولویت H استفاده می‌کنیم:

$$w^{(1)} = (0.2167,\ 0.1833,\ 0.2316,\ 0.0880,\ 0.1715,\ 0.1088)$$

(۲) از روش اولویت‌بندی کمینه انحراف رابطه ترجیحی فازی برای محاسبه بردار اولویت B استفاده می‌کنیم:

$$w^{(2)} = (0.2500,\ 0.1667,\ 0.2167,\ 0.1167,\ 0.2000,\ 0.0500)$$

(۳) از روش اولویت‌بندی مناسب برای رابطه ترجیحی فازی ناقص برای محاسبه بردار اولویت C استفاده می‌کنیم:

$$w^{(3)} = (0.1949,\ 0.2015,\ 0.1773,\ 0.1448,\ 0.1485,\ 0.1330)$$

گام ۲) از عملگر WG برای محاسبه مقادیر شاخصه‌های iامین سطر از ماتریس R_k استفاده می‌کنیم. سپس، مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i\,(w^{(k)})$ را برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z_1\,(w^{(1)}) &= WG_{w^{(1)}}\,(r_{11}^{(1)},\ r_{12}^{(1)},\ \ldots,\ r_{16}^{(1)}) \\ &= 70^{0.2167} \times 80^{0.1833} \times 85^{0.2316} \times 75^{0.0880} \times 90^{0.1715} \times 80^{0.1088} \\ &= 79.9350 \end{aligned}$$

به طور مشابه داریم:

$$z_2(w^{(1)}) = 78.7135,\ \ z_3(w^{(1)}) = 77.7927,\ \ z_4(w^{(1)}) = 73.2201$$
$$z_1\,(w^{(2)}) = 78.0546,\ \ z_2\,(w^{(2)}) = 74.9473,\ \ z_3\,(w^{(2)}) = 78.2083$$
$$z_4(w^{(2)}) = 81.1153,\ \ z_1\,(w^{(3)}) = 83.5666,\ \ z_2\,(w^{(3)}) = 78.8167$$

$$z_3(w^{(3)}) = 83.7737\,,\ z_4(w^{(3)}) = 81.3388\,,\ z_2(w^{(3)}) = 78.8167$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i\,(w^{(k)})$ هر گزینه x_i را متناظر با تصمیم‌گیرندگان d_k با استفاده از عملگر CWG بدست می‌آوریم (فرض کنید بردار وزن برابر $\omega = \left(\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\right)$ است). ابتدا از $\lambda,\ t$ و $z_i\,(w^{(k)})$ برای محاسبه $z_i\,(w^{(k)})^{t\lambda_k}$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&z_1\,(w^{(1)})^{3\lambda_1} = 76.5085,\ z_2(w^{(1)})^{3\lambda_1} = 75.3509,\ z_3(w^{(1)})^{3\lambda_1} = 74.4782\\
&z_4(w^{(1)})^{3\lambda_1} = 70.1429,\ z_1\,(w^{(2)})^{3\lambda_2} = 85.1621,\ z_2(w^{(2)})^{3\lambda_2} = 81.7055\\
&z_3(w^{(2)})^{3\lambda_2} = 85.3332\,,\ z_4(w^{(2)})^{3\lambda_2} = 88.5696\,,\ z_1\,(w^{(3)})^{3\lambda_3} = 79.9489\\
&z_2(w^{(3)})^{3\lambda_3} = 75.4488,\ z_3(w^{(3)})^{3\lambda_3} = 80.1450\,,\ z_4(w^{(3)})^{3\lambda_3} = 77.8386
\end{aligned}$$

بر طبق محاسبات فوق، مقادیر شاخصه‌ها برای گزینه‌های x_i به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&z_1(\lambda,\,\omega) = 80.3332,\ z_2(\lambda,\,\omega) = 76.9416\\
&z_3(\lambda,\,\omega) = 79.9328,\ z_4(\lambda,\,\omega) = 78.3271
\end{aligned}$$

گام ٤) مطابق مقادیر بدست آمده فوق از $z_i(\lambda,\,\omega)$، گزینه‌های x_i را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$$

همانطور که مشاهده می‌شود بهترین گزینه x_1 است.

فصل سوم

حل مسائل *MADM* با اطلاعات جزئی اوزان

مسائل متعددی در حوزه تصمیم‌گیری چندشاخصه وجود دارد که تنها اطلاعات اندکی در مورد اوزان آنها وجود داشته و مقادیر شاخصه‌ها نیز اعداد حقیقی هستند. از این‌رو، بخشی از تحقیقات دانشمندان در دنیا متوجه این حوزه گردیده است. در این بخش، روشهای اصلی تصمیم‌گیری برای اینگونه مسائل را معرفی کرده و مثالهای کاربردی آن را بیان خواهیم نمود.

۳-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه بر پایه نقطه ایده‌آل[1]

۳-۱-۱ روش تصمیم‌گیری

در یک مسئله *MADM*، فرض کنید X مجموعه گزینه‌ها و U مجموعه شاخصه‌ها باشد. بردار وزن شاخصه‌ها $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ بوده و Φ مجموعه بردارهای وزن شاخصه‌ها است که توسط اطلاعات وزنی معلوم $w \in \Phi$ تعیین شده است. همچنین، $A=(a_{ij})_{n\times m}$ ماتریس تصمیم و

[1] Ideal Point

$R=(r_{ij})_{n\times m}$ ماتریس تصمیم نرمال است. بردار خط $(r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{im})$ مرتبط با گزینه x_i است. بر مبنای ماتریس R، فرض کنید نقطه $x^+=(1, 1, ..., 1)$ نقطه ایده‌آل مثبت[1] (گزینه ایده‌آل مثبت یا بهترین گزینه فرضی) و نقطه $x^-=(0, 0, ..., 0)$ نقطه ایده‌آل منفی[2] (گزینه ایده‌آل منفی یا بدترین گزینه فرضی) باشند. بدیهی است که بهترین گزینه موجود آن گزینه‌ای است که به نقطه ایده‌آل مثبت نزدیکتر و یا آن گزینه‌ای است که از نقطه ایده‌آل منفی دورتر باشد. بنابراین، از روشی که در ادامه مطرح خواهد شد برای رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده می‌کنیم (جیان و ژوو، (۲۰۰۳)[3]).

(۱) فرض کنید

$$e_i^+(w)=\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}-1|w_j=\sum_{j=1}^{m}(1-r_{ij})w_j,\ i=1, 2, ..., n$$

انحراف وزنی میان گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت باشد. از آنجاکه هرچه گزینه ما به نقطه ایده‌آل مثبت نزدیکتر باشد، بهتر است، پس هرچه $e_i^+(w)$ کوچک باشد، گزینه موردنظر یا x_i بهتر است. در نتیجه، می‌توان مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر را برای کمینه نمودن مقدار $e_i^+(w)$ ایجاد نمود:

$$\textbf{(M-3.1)}\ \begin{cases}\min\ e^+(w)=(e_1^+(w), e_2^+(w), ..., e_n^+(w))\\ s.t.\ \ w\in\Phi\end{cases}$$

اگر تمامی توابع $e_i^+(w)(i=1, 2, ..., n)$ را بیطرفانه یا منصفانه در نظر بگیریم، می‌توان درجه اهمیت یکسانی به هرکدام تخصیص داد و پس از آن مدل بهینه‌سازی *(M-3.1)* را به مدل تک‌هدفه زیر تقلیل داد:

$$\textbf{(M-3.2)}\ \begin{cases}\min\ e^+(w)=\sum_{i=1}^{n}e_i^+(w)\\ s.t.\ \ w\in\Phi\end{cases}$$

---

[1] Positive Ideal Point
[2] Negative Ideal Point
[3] Qian and Xu (2003)

به عبارتی

$$\textbf{(M-3.3)}\begin{cases} \min\ e^{+}(w)=n-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}\,w_j \\ s.t.\ \ w\in\Phi \end{cases}$$

با حل این مدل به جواب بهینه $w^{+}=(w_1^{+},\ w_2^{+},\ ...,\ w_m^{+})$ می‌رسیم. سپس، توابع $e_i^{+}(w)$ را با مقادیر w^{+} بدست آمده حل کرده و گزینه‌های x_i را بر اساس e_i^{+} به صورت صعودی رتبه‌بندی می‌کنیم. در این حالت بهترین گزینه، گزینه‌ای است که کمترین مقدار $e_i^{+}(w^{+})$ را داراست.

در حالت خاص، اگر تصمیم‌گیرنده قادر به ارائه هیچ اطلاعات وزنی نباشد، آنگاه خواهیم توانست مدل ساده بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را به صورت ذیل تشکیل دهیم:

$$\textbf{(M-3.4)}\begin{cases} \min\ F^{+}(w)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^{+}(w) \\ s.t.\ \ w_j\geq 0,\ \ j=1,\ 2,\ ...,\ m,\ \sum\limits_{j=1}^{m} w_j=1 \end{cases}$$

که $f_i^{+}(w)=\sum\limits_{j=1}^{m}(1-r_{ij})w_j^2$ نشان‌دهنده انحراف میان گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت است. برای حل این مدل، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(w,\ \zeta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(1-r_{ij})w_j^2+2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m} w_j-1\right)$$

با مشتق‌گیری از $L(w,\ \zeta)$ نسبت به w_j و ζ و متحد صفر قرار دادن این مشتقات جزئی، معادلات زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(w,\, \zeta)}{\partial \omega_j} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (1-r_{ij})w_j + 2\zeta \\ \dfrac{\partial L(w,\, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum\limits_{j=1}^{m} w_j - 1 = 0 \end{cases}$$

که در نهایت جواب بهینه به صورت خواهد بود:

$$w_j^+ = \frac{\dfrac{1}{n-\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ij}}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{n-\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ij}}}, \quad j=1,\, 2,\, ...,\, m \qquad (۳-۱)$$

سپس، توابع $f_i^+(w)(i=1,\, 2,\, ...,\, n)$ را با مقادیر $w^+=(w_1^+,\, w_2^+,\, ...,\, w_m^+)$ حل نموده و طبق مقادیر بدست آمده $f_i^+(w^+)$ ، گزینه‌های x_i را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم. در این حالت، بهترین گزینه، گزینه با کمترین مقدار $f_i^+(w^+)$ خواهد بود.

(۲) فرض کنید

$$e_i^-(w) = \sum_{j=1}^{m} |\, r_{ij} - 0 \,|\, w_j = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j,\;\; i=1,\, 2,\, ...,\, n$$

انحراف وزنی میان گزینه x_i و نقطه ایده‌آل منفی باشد. از آنجاکه هرچه گزینه x_i از نقطه ایده منفی دورتر باشد، آن گزینه بهتر است، لذا، هرچه مقدار $e_i^-(w)$ بزرگتر باشد، گزینه x_i بهتر خواهد بود. بنابراین، همانند قسمت (۱) فوق‌الذکر، تابع بهینه‌سازی چندهدفه زیر را می‌توان تشکیل داد:

$$\textbf{(M-3.5)} \begin{cases} \max\; e^-(w) = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^-(w) \\ s.t.\;\; w \in \Phi \end{cases}$$

به عبارتی:

$$
\textbf{(M-3.6)} \begin{cases} \max\ e^{-}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j \\ s.t.\ \ w \in \Phi \end{cases}
$$

با حل مدل فوق، به جواب بهینه $w^{-} = (w_1^{-}, w_2^{-}, \ldots, w_m^{-})$ می‌رسیم. پس از آن مقادیر w^{-} را درون توابع $e_i^{-}(w)$ جایگذاری و آنها را حل می‌کنیم. در نهایت، گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $e_i^{-}(w^{-})$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم. بهترین گزینه، گزینه متناظر با بیشترین مقدار $e_i^{-}(w^{-})$ خواهد بود.

۳-۱-۲ مثال کاربردی

در ادامه یک مسئله *MADM* در حوزه نظامی (لی و ژونگ، (۲۰۰۳)[1]) تشریح و حل خواهد شد.

مثال ۱-۳ سامانه آتش، یک سیستم پویا است که دربرگیرنده تجمیع و تخصیص مناسب سلاحهای گرم در جبهه عملیاتی است. در این میان، سامانه آتش یک تانک، در زمانی که فرمانده دستور شلیک آتش در یک درگیری دفاعی را صادر می‌کند، نقش مهمی را ایفا می‌کند. بعلاوه آرایش خط آتش، از اهمیت بالایی در رسیدن به اهداف از پیش تعیین شده برخوردار است و موجب بهبود پایداری دفاعی، انهدام مواضع دشمن و پشتیبانی از نیروهای خودی می‌شود. حال فرض کنید اولین دسته از تانکها در حال تدارک یک نبرد دفاعی در منطقه‌ای با چهار ارتفاع مختلف هستند (گزینه‌ها) $x_i(i=1, 2, 3, 4)$. لازم است این ارتفاعات جهت موضع‌گیری واحدهای تانک برای فرمانده ارزیابی و مقایسه شوند تا بهترین انتخاب انجام شود. شاخصه‌های مسئله عبارتند از: (۱) u_1: میزان دید، (۲) u_2: فاصله کنترل شلیک، (۳) u_3: تعداد ارتفاعاتی که از پایین دیده می‌شوند، (۴) u_4: شیب و (۵) u_5: اختلاف ارتفاع.

[1] Li and Zhong (2003b)

فرض کنید $w=(w_1, w_2, ..., w_5)$، که در آن $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{5} w_j = 1$ می‌باشد، بردار وزنی است که به دنبال محاسبه آن هستیم. ویژگیهای این چهار ارتفاع می‌توانند در ماتریس $A=(a_{ij})_{4\times5}$ نشان داده شوند. تمام داده‌ها در جدول (۳-۱) نشان داده شده است:

گام ۱) با وجود اینکه گزینه‌های موجود در مسئله از نوع سود هستند، ولی باید در نظر داشت که ابعادشان متفاوت است. از معادله (۱-۲) برای نرمال‌سازی ماتریس A و تبدیل آن به ماتریس R استفاده می‌کنیم. مقادیر ماتریس نرمال در جدول (۳-۲) نشان داده شده است.

جدول ۱-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.37	1800	2	19^o	90
x_2	0.58	2800	5	28^o	105
x_3	0.52	3500	5	32^o	130
x_4	0.43	1900	3	27^o	98

جدول ۲-۳ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.6379	0.5143	0.4000	0.5938	0.6923
x_2	1.0000	0.8000	1.0000	0.8750	0.8077
x_3	0.8966	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x_4	0.7414	0.5429	0.6000	0.7538	0.8438

گام ۲) حال می‌توان دو مورد را در نظر گرفت:

۱) اگر اطلاعات وزن روی شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم باشد، آنگاه با استفاده از معادله (۳-۱) مقادیر وزن شاخصه‌ها را بدست می‌آوریم:

$$w^{+}=(0.2282,\ 0.1446,\ 0.1653,\ 0.2404,\ 0.2215)$$

و مقادیر $f_i^{+}(w^{+})$ را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

$$f_1^{+}(w^{+})=0.0840\ ,\ \ f_2^{+}(w^{+})=0.0208\ ,\ \ f_3^{+}(w^{+})=0.0054\ ,\ \ f_4^{+}(w^{+})=0.055$$

که از روی این مقادیر، رتبه‌بندی گزینه‌های x_i به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1$$

بنابراین، بهترین گزینه x_3 است.

۲) اگر اطلاعات معلوم اوزان به شکل زیر باشد:

$$\Phi=\Big\{\, w=(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5)\,|\,0.15\le w_1\le 0.25,\ \ 0.13\le w_2\le 0.15$$
$$0.15\le w_3\le 0.20,\ \ 0.20\le w_4\le 0.25,\ 0.20\le w_5\le 0.23,\ \sum_{j=1}^{5} w_j=1\Big\}$$

آنگاه بردار وزن شاخصه‌ها را از مدلهای بهینه‌سازی (*M-3.3*) و (*M-3.6*) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$w^{+}=w^{-}=(0.22,\ 0.15,\ 0.20,\ 0.20,\ 0.23)$$

که با جاگذاری آنها در توابع $e_i^{+}(w^{+})$ و $e_i^{-}(w^{-})$ داریم:

$$e_1^{+}(w^{+})=0.4245\ ,\ e_2^{+}(w^{+})=0.0992\ ,\ e_3^{+}(w^{+})=0.0227$$
$$e_4^{+}(w^{+})=0.2933\ ,\ e_1^{-}(w^{-})=0.5755\ ,\ e_2^{-}(w^{-})=0.9008$$
$$e_3^{-}(w^{-})=0.9773\ ,\ e_4^{-}(w^{-})=0.7067$$

در نهایت رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت زیر است:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1$$

بنابراین، گزینه x_3 از سایر گزینه‌ها بهتر است.

۳-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر درجات ارضاء گزینه‌ها[1]

۳-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

فرض کنید در یک مسئله $MADM$، بردارهای X و U به ترتیب مجموعه‌های گزینه‌ها و شاخصه‌ها باشند. همچنین، بردارهای w و Φ را به ترتیب بعنوان بردار وزن شاخصه‌ها و مجموعه بردارهای وزن ممکن (که از طریق اطلاعات معلوم اوزان تعیین شده‌اند) در نظر بگیرید. ماتریسهای $A=(a_{ij})_{n\times m}$ و $R=(r_{ij})_{n\times m}$ را به ترتیب، ماتریس تصمیم و ماتریس تصمیم نرمال در نظر بگیرید.

تعریف ۳-۱ (ژوو و سان، (۲۰۰۱)[2]) اگر $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ جواب بهینه مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر باشد:

$$\textbf{(M-3.7)}\quad \begin{cases} \max\ z_i(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,w_j, \quad i=1, 2, ..., n \\ s.t.\ \ w\in\Phi \end{cases}$$

آنگاه $z_i^{\max}=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}w_j$ مقدار ایده‌آل مثبت کلی[3] شاخصه‌ها برای گزینه‌های x_i خواهد بود.

تعریف ۳-۲ (ژوو و سان، (۲۰۰۱)) اگر $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ جواب بهینه مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر باشد:

$$\textbf{(M-3.8)}\quad \begin{cases} \min\ z_i(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,w_j, \quad i=1, 2, ..., n \\ s.t.\ \ w\in\Phi \end{cases}$$

---

[1] Satisfaction Degrees of Alternatives
[2] Xu and Sun (2001)
[3] Positive Ideal Overall Attribute Value

آنگاه $z_i^{\min} = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j$ مقدار ایده‌آل منفی کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌های x_i خواهد بود.

تعریف ۳-۳ (ژوو و سان، (۲۰۰۱)[1]) اگر داشته باشیم:

$$\rho_i(w) = \frac{z_i(w) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}} \qquad (۳-۲)$$

آنگاه $\rho_i(w)$ به را بعنوان "درجه رضایتمندی گزینه x_i " می‌نامند.

در حالت کلی، هرچه مقدار $\rho_i(w)$ بیشتر باشد، گزینه x_i بهتر خواهد بود، با در نظر گرفتن اینکه مقدار کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه باید از روی یک بردار وزن $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ محاسبه گردد، مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر را ایجاد می‌کنیم:

$$\textbf{(M-3.9)} \begin{cases} \max \ \rho(w) = (\rho_1(w), \ \rho_2(w), \ ..., \ \rho_n(w)) \\ s.t. \ \ w \in \Phi \end{cases}$$

از آنجاکه تمام توابع $\rho_i(w)(i = 1, 2, ..., n)$ بیطرفانه یا منصفانه هستند، می‌توان به آنها میزان اهمیت یکسانی تخصیص داد و پس از آن مدل فوق را به مدل تک‌هدفه زیر تبدیل نمود (ژوو و سان، (۲۰۰۱)):

$$\textbf{(M-3.10)} \begin{cases} \max \ \rho(w) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(w) \\ s.t. \ \ w \in \Phi \end{cases}$$

با حل مدل (*M-3.10*)، بردار $w^+ = (w_1^+, w_2^+, ..., w_m^+)$ محاسبه شده، سپس مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه x_i به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$z_i(w^+) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_i^+ \quad i = 1, 2, ..., n$$

[1] Xu and Sun (2001)

که با توجه به مقادیر فوق می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی کرد.

جدول ۳-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	47177	16.61	8.89	31.05	15.77
x_2	43323	9.08	3.65	29.80	8.44
x_3	59023	13.84	6.06	26.55	12.87
x_4	46821	10.59	3.51	22.46	7.41
x_5	41646	13.24	4.64	24.33	9.33
x_6	26446	10.16	2.38	26.80	9.85
x_7	38381	11.97	4.79	26.45	10.64
x_8	57808	10.29	4.54	23.00	9.23
x_9	28869	7.68	2.12	31.08	9.05
x_{10}	38812	8.92	3.38	25.68	8.73
x_{11}	30721	10.87	4.15	30.36	11.44
x_{12}	24848	10.77	2.42	30.71	11.37
x_{13}	26925	9.34	3.06	30.11	10.84
x_{14}	23269	8.25	2.58	32.57	8.62
x_{15}	28267	8.13	3.17	29.25	9.17
x_{16}	21583	7.41	4.66	35.35	11.27

۳-۲-۲ مثال کاربردی

مثال ۲-۳ بر اساس داده‌های آماری مربوط به شاخص سود اقتصادی صنعت در چین (که در کتاب سال آمار اقتصادی صنایع چین ۲۰۰۳ آمده است)، می‌توان تحلیلی از سود اقتصادی در ۱۶ منطقه چین (شامل استانها و شهرداریهایی که مستقیماً تحت نظر دولت هستند) انجام داد. در واقع مجموعه گزینه‌های

موجود در این مسئله، ۱۶ استان کشور چین هستند که این مجموعه را با $X=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{16}\}$ نمایش می‌دهیم. این مناطق عبارتند از:

$$X=\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{16}\}=\{\text{Beijing, Tianjin, Shanghai, Jiangsu, Zhejiang, Anhui, Fujian, Guangdong, Liaoning, Shandong, Hubei, Hunan, Henan, Jiangxi, Hebei, Shanxi}\}$$

شاخصهای ارزیابی ۱۶ گزینه موجود در مسئله به این صورت هستند: (۱) u_1: بهره‌وری کل نیروی کار (یوان به ازای هر نفر)، (۲) u_2: نرخ مالیات بر بهره سرمایه (درصد)، (۳) u_3: سود حاصل از هر صد یوان درآمد فروش (یوان)، (۴) u_4: سهم گردش سرمایه در هر صد یوان خروجی صنعت، (۵) u_5: نرخ سود تولید (درصد). در میان این شاخصه‌ها فقط شاخصه چهارم (سهم گردش سرمایه در هر صد یوان خروجی صنعت) از جنس هزینه و الباقی از جنس سود هستند، که مقادیر آنها در جدول (۳-۳) قابل مشاهده است.

همچنین، اطلاعات وزن شاخصه‌ها به صورت زیر است:

$$\Phi=\Big\{\,w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_5)\,|\,0.22\le w_1\le 0.24,\ \ 0.18\le w_2\le 0.20\ ,$$
$$0.15\le w_3\le 0.17\ ,\ 0.23\le w_4\le 0.26\ ,\ 0.16\le w_5\le 0.17,\ \sum_{j=1}^{5} w_j=1\Big\}$$

در ادامه، با استفاده از روش مطرح شده در بخش (۳-۲-۱)، اقدام به رتبه‌بندی گزینه‌های این مسئله می‌کنیم.

گام ۱) با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) ماتریس تصمیم A را به ماتریس تصمیم نرمال R تبدیل می‌کنیم، که در جدول (۳-۴) مقادیر ماتریس نرمال قابل مشاهده است.

گام ۲) از مدلهای بهینه‌سازی *(M-3.7)* و *(M-3.8)* برای بدست آوردن مقادیر ایده‌آلهای مثبت و منفی کلی $z_i^{\max}$ و $z_i^{\min}$ استفاده می‌کنیم:

$$z_1^{\max}=0.890,\ z_2^{\max}=0.623,\ z_3^{\max}=0.851,\ z_4^{\max}=0.706$$
$$z_5^{\max}=0.735,\ z_6^{\max}=0.585,\ z_7^{\max}=0.890,\ z_8^{\max}=0.777$$
$$z_9^{\max}=0.522,\ z_{10}^{\max}=0.633,\ z_{11}^{\max}=0.631,\ z_{12}^{\max}=0.576$$

$$z_{13}^{\max}=0.575,\ z_{14}^{\max}=0.502,\ z_{15}^{\max}=0.555,\ z_{16}^{\max}=0.534$$
$$z_{1}^{\min}=0.704,\ z_{2}^{\min}=0.581,\ z_{3}^{\min}=0.797,\ z_{4}^{\min}=0.654$$
$$z_{5}^{\min}=0.684,\ z_{6}^{\min}=0.542,\ z_{7}^{\min}=0.657,\ z_{8}^{\min}=0.722$$
$$z_{9}^{\min}=0.485,\ z_{10}^{\min}=0.588,\ z_{11}^{\min}=0.588,\ z_{12}^{\min}=0.534$$
$$z_{13}^{\min}=0.535,\ z_{14}^{\min}=0.466,\ z_{15}^{\min}=0.517,\ z_{16}^{\min}=0.497$$

جدول ٤-۳ ماتریس نرمال R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.799	1.000	1.000	0.723	1.000
x_2	0.734	0.547	0.411	0.754	0.535
x_3	1.000	0.833	0.682	0.846	0.816
x_4	0.793	0.638	0.395	1.000	0.470
x_5	0.706	0.797	0.522	0.923	0.592
x_6	0.448	0.612	0.268	0.838	0.625
x_7	0.650	0.721	0.539	0.849	0.675
x_8	0.979	0.620	0.511	0.977	0.585
x_9	0.489	0.462	0.238	0.723	0.574
x_{10}	0.658	0.537	0.380	0.875	0.554
x_{11}	0.520	0.654	0.467	0.740	0.725
x_{12}	0.421	0.648	0.272	0.731	0.721
x_{13}	0.456	0.562	0.344	0.746	0.687
x_{14}	0.394	0.497	0.290	0.690	0.547
x_{15}	0.479	0.489	0.357	0.768	0.581
x_{16}	0.366	0.430	0.524	0.635	0.715

گام ۳) با استفاده از درجه رضایت‌مندی هر گزینه و مدل (*M-3.10*)، مدل بهینه‌سازی زیر را ایجاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max \quad \rho(w) = 0.464w_1 + 0.466w_2 + 0.339w_3 + 0.584w_4 + 0.473w_5 - 0.477 \\ s.t. \quad 0.22 \le w_1 \le 0.24,\ \ 0.18 \le w_2 \le 0.20,\ \ 0.15 \le w_3 \le 0.17 \\ \qquad\quad 0.23 \le w_4 \le 0.26,\ \ 0.16 \le w_5 \le 0.17,\ \ \sum_{j=1}^{5} w_j = 1 \end{cases}$$

با حل این مدل، به جواب بهینه زیر می‌رسیم:

$$w = (0.22,\ 0.20,\ 0.15,\ 0.26,\ 0.17)$$

که از روی آن مقادیر کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &z_1(w) = 0.8838,\ z_2(w) = 0.6195,\ z_3(w) = 0.8476,\ z_4(w) = 0.7012 \\ &z_5(w) = 0.7336,\ z_6(w) = 0.5853,\ z_7(w) = 0.7035,\ z_8(w) = 0.7695 \\ &z_9(w) = 0.5212,\ z_{10}(w) = 0.6308,\ z_{11}(w) = 0.6309,\ z_{12}(w) = 0.5757 \\ &z_{13}(w) = 0.5750,\ z_{14}(w) = 0.5020,\ z_{15}(w) = 0.5552,\ z_{16}(w) = 0.5318 \end{aligned}$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &x_1 \succ x_3 \succ x_8 \succ x_5 \succ x_7 \succ x_4 \succ x_{11} \succ x_{10} \succ x_2 \\ &\succ x_6 \succ x_{12} \succ x_{13} \succ x_{15} \succ x_{16} \succ x_9 \succ x_{14} \end{aligned}$$

براساس نتایج رتبه‌بندی می‌توان دید که سطح سود اقتصادی صنعتی پکن بعنوان مرکز سیاسی، اقتصادی و فرهنگی چین در میان ۱۶ منطقه مورد بررسی، رتبه نخست را دارد. این موفقیت بدلیل زیرساختهای قوی پکن است. مقام دوم از آن شانگهای است. رتبه‌های سوم تا دهم مربوط است به استانهای: گوانگ‌دونگ، ژی‌جوانگ، فوجیان، جیانگ‌سو، هوبی، شان‌دونگ، تیان‌جین، و اون‌های که اغلب آنها ساحلی بوده و یا بعنوان منطقه آزاد هستند. مناطق جیانگسی و شانکسی که استانهای داخلی هستند، بدلیل زیرساختهای اقتصادی ضعیف، فناوری قدیمی و سطح پایین مدیریتی، رتبه‌های شانزدهم و چهاردهم را کسب کرده‌اند. استان لیا اُنینگ که قطب صنایع سنگین چین است بخاطر تجهیزات قدیمی، عدم سرمایه کافی و فناوری عقب‌مانده حائز رتبه پانزدهم شده است. البته این تحلیل متناسب با سال آماری ۲۰۰۳ است.

۳-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر مدل بیشینه‌سازی پراکندگی

۱-۳-۳ روش تصمیم‌گیری

در یک مسئله $MADM$، مغایرت یا انحراف بین گزینه x_i و هر کدام از گزینه‌های مسئله نسبت به شاخصه u_j به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$d_{ij}(w) = \sum_{k=1}^{n} (r_{ij} - r_{kj})^2 w_j, \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., m$$

اجازه دهید تا معادله

$$d_j(w) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (r_{ij} - r_{kj})^2 w_j, \quad j = 1, 2, ..., m$$

را میزان انحراف کل میان گزینه‌ها و سایر گزینه‌های مسئله نسبت به شاخصه u_j در نظر بگیریم. طبق تحلیلهای انجام شده در بخش (۱-۵)، انتخاب بردار وزن w باید طوری باشد که انحراف کل میان گزینه‌ها را بیشینه سازد. در نتیجه، می‌توان تابع انحراف زیر را تشکیل داد:

$$d(w) = \sum_{j=1}^{m} d_j(w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_{ij}(w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (r_{ij} - r_{kj})^2 w_j$$

که از روی آن می‌توان مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را ایجاد نمود:

$$\textbf{(M-3.11)} \begin{cases} \max \ d(w) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (r_{ij} - r_{kj})^2 w_j \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

با حل مدل برنامه‌ریزی خطی فوق، به جواب بهینه بردار وزن شاخصه‌ها یعنی w خواهیم رسید. بر اساس تحلیلهای فوق، الگوریتم زیر را معرفی می‌کنیم:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، فرض کنید a_{ij} مقدار شاخصه u_j برای گزینه x_i باشد. حال ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل داده و سپس با نرمال‌سازی آن، ماتریس نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ را بدست آورید.

گام ۲) تصمیم‌گیرنده اطلاعات جزئی اوزان Φ را در حد ممکن فراهم می‌کند.

گام ۳) مقدار بهینه بردار وزن w را از مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه *(M-3.11)* بدست آورید.

گام ٤) مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ را برای گزینه‌های x_i بدست آورید.

گام ٥) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(w)$ بدست آمده رتبه‌بندی نمائید.

۲-۳-۳ مثال کاربردی

مثال ۳-۳ یک حوزه معدنی دارای ذخایر غنی از ذغال‌سنگ است. به منظور بهبود کیفیت مواد خام خروجی ذغال‌سنگ، سه طرح برای انفجار یعنی گزینه‌های $x_i(i=1, 2, 3)$ قابل اجراست. همچنین، هشت شاخصه $u_j(j=1, 2, ..., 8)$ برای ارزیابی گزینه‌ها وجود دارند (هوو و همکاران، (۱۹۹۶)[1])، که عبارتند از: (۱) u_1: میزان کل سرمایه‌گذاری (بر حسب هزار دلار)، (۲) u_2: مدت زمان حفر چاه (بر حسب سال)، (۳) u_3: اشغال اراضی کشاورزی (بر حسب جریب)، (۴) u_4: افزایش سالانه خروجی (بر حسب ده هزار تن)، (۵) u_5: میزان ذغال سنگ تولیدی که از قبل پیش‌بینی شده (بر حسب هزار تن)، (۶) u_6: شرایط ایمنی (بر حسب سیستم صدگانی)، (۷) u_7: دوره تجدیدپذیری یا بازگشت (بر حسب سال) و (۸) u_8: بهره‌وری کارکنان (تُن بر نفر). که در میان این شاخصه‌ها، شاخصه‌های اول تا سوم از جنس هزینه و بقیه از جنس سود هستند. اطلاعات معلوم وزن شاخصه‌ها نیز که توسط تصمیم‌گیرندگان تهیه شده به صورت زیر است:

$$\Phi=\{\, w=(w_1,\, w_2, ...w_8)\,|\, 0.1\le w_1\le 0.2,\;\; 0.12\le w_2\le 0.14$$

[1] Hu et al. (1996)

$$0.11 \le w_3 \le 0.15,\ \ 0.12 \le w_4 \le 0.16,\ \ 0.07 \le w_5 \le 0.12$$
$$\left. 0.2 \le w_6 \le 0.3,\ \ 0.18 \le w_7 \le 0.21,\ \ 0.09 \le w_8 \le 0.22,\ \ \sum_{j=1}^{8} w_j = 1 \right\}$$

ماتریس تصمیم در جدول (۳-۵) نمایش داده شده است:

جدول ۵-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	18400	3	100	80	300	60	40	1.2
x_2	19600	4	120	100	400	80	40	1.3
x_3	29360	6	540	120	150	100	50	1.5

حال از روش موجود در بخش (۳-۳-۱) به منظور رتبه‌بندی طرحهای انفجار برای معدن استفاده می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) ماتریس تصمیم A را نرمال می‌کنیم. مقادیر ماتریس نرمال R در جدول (۳-۶) قابل مشاهده است:

جدول ٦-۳ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	1.0000	1.0000	1.0000	0.6667	0.7500	0.6000	0.8000	0.8000
x_2	0.9388	0.7500	0.8333	0.8333	1.0000	0.8000	0.8000	0.8000
x_3	0.6267	0.5000	1.0000	1.0000	0.3750	1.0000	1.0000	1.0000

گام ۲) از مدل تصمیم‌گیری تک‌هدفه (*M-3.11*) به منظور تشکیل مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max \ \ d(w) = 0.4860w_1 + 0.7500w_2 + 2.2234w_3 + 0.3333w_4 + 1.1875w_5 \\ \qquad\qquad + 0.4800w_6 + 0.1600w_7 + 0.1244w_8 \\ s.t. \quad 0.1 \le w_1 \le 0.2, \ \ 0.12 \le w_2 \le 0.14, \ \ 0.11 \le w_3 \le 0.15 \\ \qquad 0.12 \le w_4 \le 0.16, \ \ 0.07 \le w_5 \le 0.12, \ \ 0.2 \le w_6 \le 0.3 \\ \qquad 0.18 \le w_7 \le 0.21, \ \ 0.09 \le w_8 \le 0.22, \ \ \sum_{j=1}^{8} w_j = 1 \end{cases}$$

که با حل این مدل مقادیر اوزان بهینه به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$w = (0.10,\ 0.12,\ 0.12,\ 0.12,\ 0.07,\ 0.20,\ 0.18,\ 0.09)$$

گام ۳) با استفاده از معادله (۱-۱۲) مقادیر کلی شاخصه‌ها را برای گزینه‌های x_i به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$z_1(w) = 0.8085,\ z_2(w) = 0.8359,\ z_3(w) = 0.7611$$

گام ٤) با رتبه‌بندی گزینه‌ها بر حسب مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ داریم:

$$x_2 \succ x_1 \succ x_3$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، x_2 بهترین طرح است.

٤-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه دومرحله‌ای مبتنی بر اطلاعات جزئی اوزان

۳-٤-۱ روش تصمیم‌گیری

به طور کلی *MADM* به دنبال رتبه‌بندی و انتخاب چند گزینه براساس مقادیر کلی شاخصه‌هاست. بدیهی است که هرچه مقدار کلی شاخصه‌ها یعنی $z_i(w)$ برای گزینه‌ای بیشتر باشد، آن گزینه x_i بهتر است.

ما ابتدا موقعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن مقدار کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه با توجه به اوزان مرتبط با شاخصه‌ها به بیشترین حد ممکن می‌رسد. جهت انجام اینکار مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-3.12)} \begin{cases} \max \sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij} \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

با حل مدل فوق، بردار بهینه وزن شاخصه‌ها که متناظر با هر گزینه x_i است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w^{(i)} = (w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \dots, w_m^{(i)})$$

در ادامه، با استفاده از ماتریس نرمال $R = (r_{ij})_{n \times m}$ و بردار اوزان $w^{(i)}(i = 1, 2, \dots, n)$ بهترین بردار وزن را بدست می‌آوریم. فرض کنید ماتریس تصمیم شده از بردارهای وزن $w^{(i)}$ به شکل زیر است:

$$W = \begin{pmatrix} w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \cdots & w_1^{(n)} \\ w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \cdots & w_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_m^{(1)} & w_m^{(2)} & \cdots & w_m^{(n)} \end{pmatrix}$$

در مرحله بعد بردار وزن ترکیبی حاصل شده از ترکیب خطی n بردار وزن $w^{(i)}$ را بدست می‌آوریم:

$$w = Wv \tag{۳-۳}$$

در رابطه فوق w بردار وزن ترکیبی و v بردار ستونی n بُعدی است که در شرط $vv^T = 1$ صدق می‌کند. اگر $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})(i = 1, 2, \dots, n)$ باشد، آنگاه بردار R به صورت $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$z_i(v) = \sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij} = r_i W v \tag{۳-۴}$$

بردار وزن معقول و مناسب v آن برداری است که بتواند مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها را حتی‌الامکان بزرگ سازد. برای این منظور مدل تصمیم‌گیری چندهدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-3.13)}\ \begin{cases} \max(z_1(v),\ ,\ z_2(v)...,\ z_n(v)) \\ s.t. \quad vv^T = 1 \end{cases}$$

با در نظر گرفتن این موضوع که مقادیر کلی شاخصه‌ها یعنی $z_i(v)$ بیطرفانه یا منصفانه هستند، مدل (*M-3.13*) را می‌توان به یک مدل بهینه‌سازی تک هدفه با اوزان برابر تبدیل نمود:

$$\textbf{(M-3.14)}\ \begin{cases} \max\ z(v)z(v)^T \\ s.t. \quad vv^T = 1 \end{cases}$$

که در مدل فوق، $z(v) = (z_1(v),\ z_2(v),\ ...,\ z_n(v)) = RWv$ است. معادله $f(v) = z(v)z(v)^T$ را در نظر بگیرید، آنگاه با استفاده از معادله (۳-۴) خواهیم داشت:

$$f(v) = z(v)z(v)^{\ T} = v(RW)(RW)^T v^T$$

طبق نظریه ماتریسها، تابع $f(v)$ وجود دارد بگونه‌ای که مقدار بیشینه‌اش برابر $(RW)(RW)^T$، مقدار ویژه بیشینه آن برابر $\lambda_{\max}$ و v بردار ویژه متناظر با $\lambda_{\max}$ باشد. از آنجاکه ماتریس $(RW)(RW)^T$ یک ماتریس متقارن نامنفی معین است، طبق نظریه پران–فروبنیوس[۱] در مورد ماتریسهای نامنفی تقلیل‌ناپذیر[۲]، مقدار $\lambda_{\max}$ یکه می‌باشد و بردار ویژه متناظر آن نیز مثبت است ($v > 0$). بنابراین، با استفاده از معادله (۳-۳)، بردار وزن ترکیبی (بهترین بردار سازش[۳]) را بدست می‌آوریم و از معادله (۱-۱۲) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها روی هر گزینه استفاده کرده و سپس گزینه‌ها را طبق مقادیر بدست آمده رتبه‌بندی می‌کنیم. بر اساس تحلیلهای فوق، الگوریتم زیر را برای این روش معرفی می‌کنیم (ژوو، (۲۰۰۲)[۴]):

---

[1] Perron-Frobenius
[2] Irreducible
[3] Best Compromise Vector
[4] Xu (2002c)

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، فرض کنید a_{ij}ها بعنوان مقادیر شاخصه‌ها برای هر گزینه x_i باشند. حال ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل دهید که ماتریس نرمال متناظر آن $R=(r_{ij})_{n\times m}$ است.

گام ۲) تصمیم‌گیرنده، اطلاعات وزن شاخصه‌ها یعنی Φ را فراهم می‌کند.

گام ۳) از مدل تصمیم‌گیری تک‌هدفه (*M-3.12*) برای بدست آوردن بردار وزن بهینه هر گزینه x_i استفاده کنید.

$$w^{(i)}=(w_1^{(i)},\, w_2^{(i)},\, ...,\, w_m^{(i)})$$

گام ٤) ماتریس W، متشکل از n بردار وزن $w^{(i)}$، را تشکیل داده و مقدار ویژه بیشینه ماتریس $(RW)(RW)^T$ و بردار ویژه v متناظر با مقدار ویژه بیشینه را بدست آورید (که البته باید نرمال باشد).

گام ۵) بردار وزن ترکیبی را با استفاده از معادله (۳-۳) بدست آورید. سپس، مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ را برای هر گزینه x_i با استفاده از معادله (۱-۱۲) محاسبه کنید.

گام ٦) گزینه‌ها را مطابق با مقادیر کلی شاخصه‌ها رتبه‌بندی کنید.

۳-٤-۲ مثال کاربردی

مثال ٤-۳ یک واحد توپخانه، شش هدف از مواضع دشمن را شناسایی کرده (گزینه‌های $x_i(i=1,\, 2,\, ...,\, 6)$) و اطلاعاتی در مورد آنها بدست آورده است. ترتیب حمله به این اهداف باید از قبل مشخص شده باشد. با توجه به شرایط واقعی، فرمانده عملیاتی، این شش هدف را متناسب با شش شاخصه ارزیابی می‌کند: (۱) u_1: اهمیت هدف، (۲) u_2: اضطرار در شلیک به هدف، (۳) u_3: قابلیت اطمینان اطلاعات در مورد هدف، (۴) u_4: رویت‌پذیری مکان هدف، (۵) u_5: آسیب‌پذیری هدف و (۶) u_6: انسجام در شلیک به هدف. سپس ماتریس تصمیم A را تشکیل می‌دهد. این ماتریس در جدول (۳-۷) نشان داده شده است.

جدول ۷-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	7	9	9	9	7	7
x_2	7	7	7	7	5	9
x_3	8	9	7	7	6	9
x_4	8	6	7	5	2	6
x_5	8	7	7	0	5	9
x_6	5	0	7	1	6	8

در این مسئله، شاخصه‌های $u_i (i=1, 2, 3, 4)$ از نوع سود، شاخصه پنجم از نوع هزینه و شاخصه ششم از نوع ثابت[1] است. اوزان شاخصه‌های $u_i (i=1, 2, ..., 6)$ را نمی‌توان به طور کامل تعیین کرد، لیکن اطلاعات وزن به صورت زیر است:

$$\Phi = \Big\{ w=(w_1, w_2, ..., w_6) \,|\, 0.4 \le w_1 \le 0.5,\ 0.2 \le w_2 \le 0.3,\ 0.13 \le w_3 \le 0.2,\ 0.1 \le w_4 \le 0.25,\ 0.08 \le w_5 \le 0.2,\ 0 \le w_6 \le 0.5,\ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \Big\}$$

جدول ۸-۳ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	2/3	1	1	1	0	1
x_2	2/3	7/9	0	7/9	2/5	0
x_3	1	1	0	7/9	1/5	0
x_4	1	5/9	0	5/9	1	1/2
x_5	1	7/9	0	0	2/5	0
x_6	0	0	0	1/9	1/5	1/2

[1] Fixed-Type Attribute

با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش (۳-۴-۱) گزینه‌ها را رتبه‌بندی می‌کنیم. ابتدا باید گامهای الگوریتم طی شود:

گام ۱) از معادلات (۱-۲ الف)، (۱-۳ الف) و (۱-۴) استفاده کرده و ماتریس تصمیم A را به ماتریس تصمیم نرمال R تبدیل می‌کنیم. این ماتریس در جدول (۳-۸) نشان داده شده است.

گام ۲) برای گزینه x_1 از مدل تصمیم‌گیری تک‌هدفه (*M-3.12*) برای تشکیل مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max\ \ \{0.667w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_6 \\ s.t. \quad 0.4 \le w_1 \le 0.5,\ \ 0.2 \le w_2 \le 0.3,\ \ 0.13 \le w_3 \le 0.2 \\ \qquad 0.1 \le w_4 \le 0.25,\ \ 0.08 \le w_5 \le 0.2,\ \ 0 \le w_6 \le 0.5,\ \ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \end{cases}$$

جواب بهینه این مدل، بردار وزن شاخصه‌ها است که به شکل زیر نشان داده شده است:

$$w^{(1)} = (w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_3^{(1)}, w_4^{(1)}, w_5^{(1)}, w_6^{(1)}) = (0.4, 0.2, 0.13, 0.1, 0.08, 0.09)$$

به طور مشابه در مورد گزینه‌های $x_i\,(i = 2, 3, 4, 5, 6)$، می‌توان مدل بهینه‌سازی تک هدفه را ایجاد نموده و بردار وزن بهینه را به صورت زیر بدست آورد:

$$w^{(2)} = (w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, w_3^{(2)}, w_4^{(2)}, w_5^{(2)}, w_6^{(2)}) = (0.49, 0.2, 0.13, 0.1, 0.08, 0)$$
$$w^{(3)} = (w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, w_3^{(3)}, w_4^{(3)}, w_5^{(3)}, w_6^{(3)}) = (0.49, 0.2, 0.13, 0.1, 0.08, 0)$$
$$w^{(4)} = (w_1^{(4)}, w_2^{(4)}, w_3^{(4)}, w_4^{(4)}, w_5^{(4)}, w_6^{(4)}) = (0.49, 0.2, 0.13, 0.1, 0.08, 0)$$
$$w^{(5)} = (w_1^{(5)}, w_2^{(5)}, w_3^{(5)}, w_4^{(5)}, w_5^{(5)}, w_6^{(5)}) = (0.49, 0.2, 0.2, 0.12, 0.08, 0)$$
$$w^{(6)} = (w_1^{(6)}, w_2^{(6)}, w_3^{(6)}, w_4^{(6)}, w_5^{(6)}, w_6^{(6)}) = (0.49, 0.2, 0.13, 0.1, 0.08, 0)$$

گام ۳) با استفاده از بردارهای وزن بدست آمده $w^{(i)}$، ماتریس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$W=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.49 & 0.49 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.29 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 & 0.13 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.19 & 0.1 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 \end{bmatrix}$$

ماتریس $(RW)(RW)^T$ را محاسبه کرده و خواهیم داشت:

$$(RW)(RW)^T=\begin{bmatrix} 2.214 & 2.355 & 2.387 & 2.387 & 2.301 & 2.214 \\ 2.355 & 2.516 & 2.549 & 2.549 & 2.454 & 2.355 \\ 2.387 & 2.549 & 2.583 & 2.583 & 2.486 & 2.387 \\ 2.387 & 2.549 & 2.583 & 2.583 & 2.486 & 2.387 \\ 2.301 & 2.454 & 2.566 & 2.566 & 2.398 & 2.301 \\ 2.214 & 2.355 & 2.355 & 2.387 & 2.301 & 2.214 \end{bmatrix}$$

که مقدار ویژه بیشینه و بردار ویژه متناظر مقدار ویژه ماتریس فوق به صورت زیر هستند:

$$\lambda_{\max}=14.522,\quad w=(0.159,\ 0.170,\ 0.172,\ 0.172,\ 0.168,\ 0.159)$$

گام ٤) از معادله (۳-۳) برای محاسبه بردار وزن ترکیبی استفاده و آن را نرمال می‌کنیم. حاصل به صورت زیر است:

$$w=(0.431,\ 0.215,\ 0.130,\ 0.115,\ 0.080,\ 0.029)$$

با استفاده از معادله (۱-۱۲) مقادیر کلی شاخصه‌ها را برای هر گزینه به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$z_1(w)=0.776,\quad z_2(w)=0.576,\quad z_3(w)=0.751$$
$$z_4(w)=0.709,\quad z_5(w)=0.630,\quad z_6(w)=0.043$$

گام ۵) گزینه‌ها را مطابق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_1\succ x_3\succ x_4\succ x_5\succ x_2\succ x_6$$

از این‌رو بهترین گزینه، x_1 می‌باشد.

۳-۵ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر مدلهای برنامه‌ریزی آرمانی خطی[1]

یک مسئله *MADM* غیرقطعی با اطلاعات ناقص اوزان شاخصه‌ها را در نظر بگیرید. این اطلاعات ناقص منجر به بروز عدم‌قطعیت در انتخاب بهترین گزینه در مسئله تصمیم‌گیری می‌شود. از این‌رو، مشارکت تصمیم‌گیرنده در فرآیند تصمیم‌گیری ضروری است. در این بخش، به معرفی روشهایی از *MADM* می‌پردازیم که در آنها اطلاعات جزئی در مورد وزن وجود دارد و ترجیحات ارائه شده روی گزینه‌ها توسط تصمیم‌گیرنده، در قالب رابطه ترجیحی چندگانه، رابطه ترجیحی فازی و مقادیر مطلوبیت[2] می‌باشند. بر پایه سه ساختار ترجیحی مجزای فوق، مدلهای برنامه‌ریزی آرمانی خطی را تشکیل داده و از روی این مدلها، بردار وزن شاخصه‌ها را محاسبه می‌کنیم. سپس، یک روش *MADM* بر اساس مدلهای برنامه‌ریزی آرمانی خطی معرفی می‌کنیم.

۳-۵-۱ مدلها

(۱) شرایطی که در آنها ترجیحات تصمیم‌گیرنده در مورد گزینه‌ها در قالب روابط ترجیحی چندگانه بیان می‌شوند[3]

برای یک مسئله *MADM*، ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}(a_{ij}>0)$ را در نظر بگیرید که ماتریس نرمال متناظر آن به صورت $R=(r_{ij})_{n\times m}(r_{ij}>0)$ است. تصمیم‌گیرنده از مقیاس نسبتی[4] (ژوو،

[1] Linear Goal Programming Models
[2] Utility Values
[3] Xu (2004g)
[4] Ratio Scale

(۱۹۹۹)[1]) برای مقایسه گزینه‌های $x_i\,(i=1,\,2,\,...,\,n)$ به صورت زوجی استفاده می‌نماید و بعد از آن رابطه ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $h_{ij}h_{ji}=1$ و $h_{ii}=1$ بوده و نیز $h_{ij}>0$ می‌باشد. به منظور یکسان‌سازی تمامی اطلاعات تصمیم با استفاده از معادله (۱-۲) می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها بر روی گزینه‌ها را در قالب روابط ترجیحی چندگانه $\bar{H}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$ بیان کرد، که در آن:

$$\bar{h}_{ij}=\frac{z_i(w)}{z_j(w)}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k}\,,\;\; i,\; j=1,\,2,\,...,\,n \qquad (۳\text{-}۵)$$

به عبارتی

$$\bar{h}_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}w_k=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k,\;\; i,\; j=1,\,2,\,...,\,n \qquad (۳\text{-}۶)$$

در حالت کلی، بین رابطه ترجیحی چندگانه $H=(h_{ij})_{n\times n}$ و $\bar{H}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$ تفاوت وجود دارد. به همین دلیل تابع مغایرت یا انحراف[2] زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k\right|,\;\; i,\; j=1,\,2,\,...,\,n \qquad (۳\text{-}۷)$$

واضح است که یک بردار وزن معقول و مناسب برای شاخصه‌ها باید مقدار تابع انحراف را کمینه سازد. بنابراین، مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-3.15)}\;\begin{cases}\min\;\; f_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k\right|, & i,\; j=1,\,2,\,...,\,n\\ s.t. \quad w\in\Phi\end{cases}$$

برای حل مدل (*M-3.15*) و با فرض اینکه تمام توابع هدف بیطرفانه یا منصفانه هستند، این مدل را به مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی ذیل تبدیل می‌کنیم:

---

[1] Xu (1999)
[2] Deviation Function

$$\textbf{(M-3.16)}\begin{cases} \min\ J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(s_{ij}d_{ij}^{+}+t_{ij}d_{ij}^{-}\right) \\ s.t.\quad \sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0,\quad i,\ j=1,2,\dots,n,\ i\neq j \\ \qquad w\in\Phi \\ \qquad d_{ij}^{+}\geq 0,\ d_{ij}^{-}\geq 0,\quad i,\ j=1,2,\dots,n,\ i\neq j \end{cases}$$

که در این مدل d_{ij}^{+} میزان انحراف مثبت از هدف $\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k$ است، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}^{+}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k\right)\vee 0$$

و d_{ij}^{-} نیز میزان انحراف منفی از هدف $\sum_{k=1}^{m}\left(h_{ij}r_{jk}-r_{ik}\right)w_k$ است، که به صورت زیر قابل تعریف است:

$$d_{ij}^{-}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(r_{ik}-h_{ij}r_{jk}\right)w_k\right)\vee 0$$

در اینجا s_{ij} عامل وزنی متناظر با انحراف مثبت d_{ij}^{+} و t_{ij} نیز عامل وزنی متناظر با انحراف منفی d_{ij}^{-} است. با حل مدل (*M-3.16*) بردار وزن شاخصه‌های w را بدست می‌آوریم. از معادله (۱-۱۲)، می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها بر روی هر گزینه را بدست آورد و از این طریق اقدام به رتبه‌بندی گزینه‌ها کرد.

(۲) شرایطی که در آنها ترجیحات تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌ها در قالب روابط ترجیحی فازی بیان می‌شوند[۱]

فرض کنید تصمیم‌گیرنده از مقیاس *0-1* (ژوو، (۱۹۹۹)[۲]) برای مقایسه گزینه‌های $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ به صورت زوجی استفاده نماید و پس از آن رابطه ترجیح فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $b_{ij}+b_{ji}=1,\ b_{ii}=0.5,\ b_{ij}\geq 0$ است. به منظور یکسان‌سازی تمام اطلاعات تصمیم می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها را به روابط ترجیحی فازی $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ تبدیل کرد، که (فن و همکاران، (۲۰۰۲)[۳]):

$$\bar{b}_{ij}=\frac{z_i(w)}{z_i(w)+z_j(w)}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k}{\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}+r_{jk})w_k} \tag{۳-۸}$$

به عبارتی

$$\bar{b}_{ij}\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}+r_{jk})w_k=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}w_k \tag{۳-۹}$$

در حالت کلی، بین روابط ترجیحی فازی $B=(b_{ij})_{n\times n}$ و $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ اختلاف وجود دارد و این دو کاملاً برابر یکدیگر نیستند. بنابراین، به منظور کمینه‌سازی اختلاف میان این دو تابع انحراف زیر را معرفی می‌کنیم:

$$h_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}\right)w_k\right|,\quad i,\ j=1,2,\ldots,n \tag{۳-۱۰}$$

پر واضح است که یک بردار وزن مناسب باید مقدار تابع انحراف را کمینه سازد. بنابراین، مدل بهینه‌سازی چندهدفه ذیل را تشکیل می‌دهیم:

[1] Xu (2004g)
[2] Xu (1999)
[3] Fan et al. (2002)

$$\textbf{(M-3.17)}\ \begin{cases} \min\ h_{ij} = \left| \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) - r_{ik} \right) w_k \right|, \ i,\ j=1,\,2,\,...,\,n \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases} \qquad (۳-۱۱)$$

برای حل مدل (*M-3.17*) و با فرض اینکه تمامی توابع هدف بیطرفانه یا منصفانه هستند، می‌توان مشابه مدل (*M-3.16*)، مدل بهینه‌سازی چندهدفه را به مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی زیر تبدیل نمود:

$$\textbf{(M-3.18)}\ \begin{cases} \min\ J = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(s_{ij} d_{ij}^{+} + t_{ij} d_{ij}^{-} \right) \\ s.t.\ \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) - r_{ik} \right) w_k - d_{ij}^{+} + d_{ij}^{-} = 0,\ i,\ j=1,\,2,\,...,\,n,\ i\neq j \\ \qquad w \in \Phi \\ \qquad d_{ij}^{+} \geq 0,\ d_{ij}^{-} \geq 0, \quad i,\ j=1,\,2,\,...,\,n,\ i\neq j \end{cases}$$

در این مدل، d_{ij}^{+} بیانگر میزان انحراف مثبت از هدف $\sum_{k=1}^{m} \left(\bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) - r_{ik} \right) w_k$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_{ij}^{+} = \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) - r_{ik} \right) w_k \vee 0$$

و d_{ij}^{-} نیز میزان انحراف منفی از هدف $\left(\sum_{k=1}^{m} \bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) - r_{ik} \right) w_k$ است، که به صورت زیر قابل تعریف است:

$$d_{ij}^{-} = \sum_{k=1}^{m} \left(r_{ik} - \bar{b}_{ij}(r_{ik}+r_{jk}) \right) w_k \vee 0$$

همچنین، s_{ij} و t_{ij} به ترتیب عوامل وزنی متناظر با میزان انحراف مثبت d_{ij}^{+} و میزان انحراف منفی d_{ij}^{-} هستند. با استفاده از روش سیمپلکس آرمانی[1] ، مدل (*M-3.18*) را حل کرده و بردار وزن شاخصه‌های w را بدست می‌آوریم. از معادله (۱-۱۲)، می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها متناظر با هر گزینه را بدست آورد و از این طریق می‌توان اقدام به رتبه‌بندی گزینه‌ها نمود.

(۳) شرایطی که در آنها ترجیحات تصمیم‌گیرنده در قالب توابع مطلوبیت بیان می‌شوند

فرض کنید تصمیم گیرنده ترجیحات خود روی گزینه‌ها را در قالب مقادیر مطلوبیت $\vartheta_i (i=1, 2, ..., n)$ بیان نماید.

به دلیل محدویتهای شرایط ذهنی[2] و عینی[3] در تصمیم‌گیری کاربردی، معمولاً اختلافاتی بین ترجیحات ذهنی و عینی در مورد مقادیر کلی شاخصه‌ها وجود دارد. به منظور توصیف این اختلافات بصورت کمّی، متغیر انحراف مثبت d_i^{+} و منفی d_i^{-} را برای مقادیر کلی شاخصه‌ها روی هر گزینه معرفی می‌کنیم، که هر دو متغیر انحراف دارای مقادیر بزرگتر یا مساوی صفر دارند. مقدار d_i^{+} بیانگر درجه‌ای است که i امین ترجیح واقعی یا عینی از i امین ترجیح ذهنی فراتر می‌رود، در حالیکه d_i^{-} نشان‌دهنده درجه‌ای است که iامین ترجیح ذهنی فراتر از i امین ترجیح عینی می‌رود. بنابراین، به مدل ذیل می‌رسیم:

$$\textbf{(M-3.19)} \begin{cases} \min\ J = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^{+} d_{ij}^{+} + t_i^{-} d_{ij}^{-} \right) \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j + d_i^{-} - d_i^{+} = \vartheta, \quad i=1, 2, ..., n \\ \qquad w \in \Phi \\ \qquad d_i^{+} \geq 0,\ d_i^{-} \geq 0, \quad i=1, 2, ..., n \end{cases}$$

[1] Goal Simplex Method
[2] Subjective
[3] Objective

که t_i^+ و t_i^- عوامل وزنی متناظر با انحراف مثبت d_{ij}^+ و انحراف منفی d_{ij}^- هستند. با استفاده از روش سیمپلکس آرمانی مدل (*M-3.19*) را حل و به بردار وزن شاخصه‌های w می‌رسیم. از معادله (۱-۱۲)، می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها را روی گزینه‌ها بدست آورد و گزینه‌ها را منطبق بر مقادیر حاصل شده رتبه‌بندی نمود.

۳-۵-۲ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، روش *MADM* مبتنی بر برنامه‌ریزی آرمانی خطی را معرفی خواهیم کرد که دارای گامهای ذیل می‌باشد:

گام ۱) در یک مسئله *MADM* مقادیر گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ با توجه به شاخصه‌ها $u_j(j=1, 2, ..., m)$ در ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times m}$ نشان داده می‌شوند. با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳)، ماتریس تصمیم را نرمال نموده و ماتریس تصمیم نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل دهید.

گام ۲) از روابطی متناسب و منطبق با نوع اطلاعاتی که تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند، برای محاسبه بردار وزن استفاده کنید. اگر او اطلاعات روابط ترجیحی چندگانه را تدارک می کند از مدل (*M-3.16*) استفاده کنید، و اگر او روابط ترجیحی فازی را در اختیار می‌گذارد از مدل (*M-3.18*) بهره بگیرید و نهایتاً اگر اطلاعات موجود، روابط ترجیحی مبتنی بر تابع مطلوبیت باشد، از مدل (*M-3.19*) استفاده کنید. با حل هر کدام از این مدلها، متناسب با اطلاعات در دست، بردار وزن شاخصه‌های w را بدست آورید.

گام ۳) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها، رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌ها از معادله (۱-۱۲) استفاده نمائید.

۳-۵-۳ مثال کاربردی

مثال ۵-۳ یک واحد تولیدی به دنبال بهبود کیفیت محصولات قدیمی خود است و پنج گزینه $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ برای انتخاب موجودند. برای ارزیابی این گزینه‌ها چهار شاخصه ذیل در این مسئله وجود دارد (ژیونگ و کائو، (۱۹۹۲)[1]): (۱) u_1: هزینه (بر حسب یوان)، (۲) u_2: کارایی (درصد)، (۳) u_3: زمان کاری بدون شکست (بر حسب ساعت) و (۴) u_4: طول عمر محصول (بر حسب سال). مقادیر شاخصه‌ها به ازای هر گزینه در جدول (۳-۹) نشان داده شده است.

جدول ۹-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	8500	90	20000	13
x_2	7500	85	15000	14
x_3	7000	87	11000	13
x_4	6500	72	8000	11
x_5	4500	70	7500	12

در میان شاخصه‌ها تنها u_1 از نوع هزینه بوده و باقی آنها از جنس سود می‌باشند. وزن شاخصه‌ها را نمی‌توان به طور کامل معین کرد و اطلاعات وزنی معلوم به صورت زیر هستند:

$$\Phi=\Big\{ w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_5)\,|\, 0.3\le w_1\le 0.45,\;\; w_2\le 0.15\,,\;\; 0.1\le w_3\le 0.35,$$
$$w_4\ge 0.03,\;\; \sum_{j=1}^{4} w_j=1,\;\; w_j\ge 0,\;\; j=1,\, 2,\, 3,\, 4 \Big\}$$

اکنون از روش ارائه شده در بخش (۳-۵-۲) به منظور حل این مسئله استفاده می‌کنیم، که شامل گامهای ذیل است:

[1] Xiong and Cao (1992)

گام ۱) با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳)، ماتریس تصمیم A را نرمال کرده و به ماتریس تصمیم R می‌رسیم، که در جدول (۳-۱۰) نمایش داده شده است.

گام ۲) بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید تصمیم‌گیرنده از مقیاس *9-1* برای مقایسه گزینه‌های $x_i\,(i=1,\,2,\,3,\,4,\,5)$ به صورت زوجی استفاده کرده و رابطه ترجیحی چندگانه ذیل را تشکیل می‌دهیم:

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1/3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/5 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

جدول ۱۰-۳ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.529	1.000	1.000	0.929
x_2	0.600	0.944	0.750	1.000
x_3	0.643	0.967	0.550	0.929
x_4	0.692	0.800	0.400	0.786
x_5	1.000	0.778	0.375	0.857

که با استفاده از مدل *(M-3.16)* با روابط ترجیحی چندگانه، بردار وزن شاخصه‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$w=(0.45,\,0,\,0,\,0.35,\,0.2)$$

و

$$d_{12}^{+}=1.4237\,,\; d_{12}^{-}=0\,,\; d_{13}^{+}=0\,,\; d_{13}^{-}=0.1062,\; d_{14}^{+}=3.4864$$
$$d_{14}^{-}=0\,,\; d_{15}^{+}=2.9894\,,\; d_{15}^{-}=0\,,\; d_{21}^{+}=0\,,\; d_{21}^{-}=0.4746$$
$$d_{23}^{+}=0\,,\; d_{23}^{-}=0.5060\,,\; d_{24}^{+}=2.3105\,,\; d_{24}^{-}=0\,,\; d_{25}^{+}=0.0202$$

$$d_{25}^- = 0\,,\ d_{31}^+ = 0.1062\,,\ d_{31}^- = 0\,,\ d_{32}^+ = 1.129\,,\ d_{32}^- = 0$$
$$d_{34}^+ = 2.3754\,,\ d_{34}^- = 0\,,\ d_{35}^+ = 0\,,\ d_{35}^- = 0.4168\,,\ d_{41}^+ = 0$$
$$d_{45}^+ = 0\,,\ d_{45}^- = 0.5011\,,\ d_{51}^+ = 0\,,\ d_{51}^- = 0.5979\,,\ d_{52}^+ = 0$$
$$d_{52}^- = 0.0202\,,\ d_{53}^+ = 1.2503\,,\ d_{53}^- = 0\,,\ d_{54}^+ = 3.7220\,,\ d_{54}^- = 0$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌ها را با استفاده از معادله (۱-۱۲) بدست می‌آوریم:

$$z_1(w) = 0.7739\,,\ z_2(w) = 0.7325\,,\ z_3(w) = 0.6677$$
$$z_4(w) = 0.6086\,,\ z_5(w) = 0.7527$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم. رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت $x_1 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ است و در نتیجه x_1 بهترین گزینه است.

۳-٦ تصمیم‌گیری چندشاخصه تعاملی مبتنی بر استراتژی تقلیل گزینه‌ها[1]

در این بخش، ایده‌ای را برای تعامل حوزه تصمیم‌گیری چندهدفه[2] با حوزه تصمیم‌گیری چندشاخصه معرفی کرده و براساس آن رویکردی برای حل مسائل *MADM* غیرقطعی با اطلاعات جزئی وزن ارائه خواهیم کرد.

۳-٦-۱ روش تصمیم‌گیری

تعریف ٤-۳ برای گزینه‌های $x_p \in X$، اگر وجود داشته باشد یک گزینه $x_q \in X$ به طوری که $z_q(w) > z_p(w)$ باشد، آنگاه گزینه x_p، گزینه مغلوب[3] نامیده می‌شود؛ در غیر اینصورت، گزینه

---

[1] Reduction Strategy for Alternatives
[2] Multi Attribute Decision Making (MODM)
[3] Dominated Alternative

نامغلوب[1] نامیده می‌شود که مقادیر کلی گزینه‌های $z_p(w)$ و $z_q(w)$ گزینه‌های x_p و x_q از طریق معادله (۱–۱۲) تعریف می‌شوند.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که گزینه مغلوب باید از فرآیند بهینه‌سازی حذف گردد. قضیه‌ای که در ادامه مطرح می‌شود روشی برای تشخیص گزینه مغلوب ارائه می‌نماید:

قضیه ۱–۳ با معلوم بودن اطلاعات جزئی وزن Φ، گزینه $x_p \in X$ مغلوب نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر $J_p < 0$ باشد، که:

$$\begin{cases} J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j + \theta\right) \\ s.t.\ \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_i + \theta \le 0, \quad i \ne p,\ i = 1, 2, ..., n \\ \qquad w \in \Phi \end{cases}$$

و θ یک متغیر کمکی آزاد[2] در علامت است و هیچ معنای واقعی ندارد.

اثبات (شرط کافی) اگر $J_p < 0$ باشد، آنگاه با توجه به شرایط محدودیت، به ازای هر $i = 1, 2, ..., n,\ i \ne p$ خواهیم داشت $\sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_i \le -\theta$. در مواردی که جواب بهینه حاصل شد، حداقل یک q وجود دارد به طوری که وقتی $i = p$ یعنی شرط تساوی برقرار است، به عبارتی تساوی $\sum_{j=1}^{m} r_{qj} w_j = -\theta$ برقرار است. از روی $J_p < 0$ نتیجه می‌شود که:

$$J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j + \theta\right) = \max_{w}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j - \sum_{j=1}^{m} r_{qj} w_j\right) < 0$$

---

[1] Non-Dominated Alternative
[2] Unconstrained Auxiliary Variable

آنگاه $\sum_{j=1}^{m} r_{qj} w_j < \sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j$ می‌باشد، به عبارتی $z_p(w) < z_q(w)$. بنابراین، x_p گزینه مغلوب نامیده می‌شود.

(شرط لازم) از آنجاکه x_p گزینه مغلوب است، پس وجود دارد یک $x_q \in X$ به‌طوری که $\sum_{j=1}^{m} r_{qj} w < \sum_{j=1}^{m} r_{pj} w$. با توجه به شرط محدودیت، داریم $\sum_{j=1}^{m} r_{qj} w_j \le -\theta$ و بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j - (-\theta) \le \sum_{j=1}^{m} r_{pj} w_j - \sum_{j=1}^{m} r_{qj} w_j < 0$$

به عبارتی $J_p < 0$، که اثبات کامل می‌گردد.

در این روش از حل مسائل *MADM*، تنها باید تمام گزینه‌های موجود در X شناسایی شوند و بفهمیم که آیا این گزینه‌ها مغلوب هستند یا خیر. پس از کشف گزینه‌های مغلوب، می‌توان آنها را از مجموعه X حذف کرد و سپس مجموعه $\bar{X}$ را بدست آورد؛ مجموعه‌ای که عناصر آن همگی گزینه‌های نامغلوب‌اند. بدیهی است که $\bar{X}$ زیرمجموعه X است و بنابراین، مجموعه گزینه X تقلیل می‌یابد.

با استفاده از قضیه (۳-۱)، فرایندی تعاملی برای یافتن گزینه ارجح[1] را به صورت زیر توسعه خواهیم داد:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، مقادیر شاخصه‌ای گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j(j=1, 2, ..., m)$ در ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times m}$ قرار دارد. با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) ماتریس تصمیم A را نرمال نموده و ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ را بدست آورید.

گام ۲) بر اساس مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها و اطلاعات جزئی معلوم در مورد وزن شاخصه‌ها و قضیه (۳-۱)، تعیین کنید که آیا گزینه x_i مغلوب است یا خیر. پس از آن گزینه‌های مغلوب را از مسئله حذف کرده و به مجموعه $\bar{X}$ می‌رسید که تمامی عناصر درون آن نامغلوب هستند. اگر اکثر

---

[1] Most Preferred Alternative

تصمیم‌گیرندگان به این نتیجه برسند که گزینه x_i از سایر گزینه‌ها برتر است و یا فقط گزینه x_i درون مجموعه $\bar{X}$ باقی بماند، آنگاه گزینه ارجح همان x_i است؛ در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳) با تصمیم‌گیرندگان تعامل‌کنید و اطلاعات تصمیم فراهم شده توسط آنها در مورد اوزان را در مجموعه Φ قرار دهید. اگر اطلاعات افزوده شده توسط تصمیم‌گیرندگان با اطلاعات درون Φ در تناقض باشد، آنگاه اطلاعات جدید را به تصمیم‌گیرنده بازگردانیده و به گام ۲ برگردید.

فرآیند تعاملی فوق همگراست. با افزایش اطلاعات وزن، تعداد گزینه‌های $\bar{X}$ نیز به مرور تقلیل می‌یابد. در نهایت، یا تمامی تصمیم‌گیرندگان به این نتیجه می‌رسند که یک گزینه معین در $\bar{X}$ مطلوب‌ترین گزینه است یا فقط یک گزینه در مجموعه $\bar{X}$ باقی می‌ماند. در نتیجه این گزینه مطلوب‌ترین گزینه است.

توضیح ۱-۳ روش تصمیم‌گیری فوق، فقط می‌تواند برای یافتن بهترین گزینه به کار رود، ولی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها روش مناسبی نیست.

۲-٦-۳ مثال کاربردی

مثال ٦-۳ فردی را در نظر بگیرید که قصد خرید خانه دارد. بنگاه مسکن، شش مکان برای خرید منزل (گزینه‌ها) $x_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,6)$ به او پیشنهاد می‌دهد. خریدار چهار شاخصه $u_i\,(i=1,\,2,\,3,\,4)$ را برای ارزیابی گزینه‌های موجود در مسئله در نظر می‌گیرد: (۱) u_1: قیمت، (۲) u_2: مساحت (بر حسب متر مربع)، (۳) u_3: فاصله منزل تا محل کار (بر حسب کیلومتر) و (۴) u_4: منطقه شهری. در میان این شاخصه‌ها، شاخصه u_1 و u_3 از جنس هزینه و u_2 و u_4 از جنس سود هستند. اطلاعات ارزیابی مکانها $x_i\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,6)$ توسط خریدار در ماتریس تصمیم A قرار می‌گیرند. این ماتریس در جدول (۳-۱۱) نشان داده شده است.

جدول ۱۱-۳ ماتریس تصمیم A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	3.0	100	10	7
x_2	2.5	80	8	5
x_3	1.8	50	20	11
x_4	2.2	70	12	9
x_5	3.2	120	25	12
x_6	3.3	110	26	10

جدول ۱۲-۳ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.600	0.833	0.800	0.583
x_2	0.720	0.667	1	0.417
x_3	1	0.417	0.400	0.917
x_4	0.818	0.583	0.667	0.750
x_5	0.563	1	0.320	1
x_6	0.545	0.917	0.308	0.833

اطلاعات معلوم وزن اطلاعات به صورت زیر است:

$$\Phi = \Big\{ w = (w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4) \,|\, 0.1 \le w_1 \le 0.45,\ \ w_2 \le 0.2,\ \ 0.1 \le w_3 \le 0.4,$$
$$w_4 \ge 0.03,\ \sum_{j=1}^{4} w_j = 1,\ \ w_j \ge 0,\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \Big\}$$

در ادامه از روش ارائه شده در بخش (۳-۶-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌شود:

ابتدا با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳)، ماتریس تصمیم A را نرمال نموده و به ماتریس تصمیم نرمال R می‌رسیم که در جدول (۳-۱۲) نشان داده شد.

روشن است که مقادیر نرمال شاخصه‌های گزینه x_6 از مقادیر متناظرش برای گزینه x_5 کمتر است. بنابراین $z_6(w) < z_5(w)$ می‌باشد. با این حساب گزینه x_6 را می‌توان از مسئله حذف کرد. برای پنج گزینه دیگر، از قضیه (۳-۱) به منظور تشخیص مغلوب بودن استفاده می‌کنیم:

برای گزینه x_1، طبق قضیه (۳-۱)، از مسئله برنامه‌ریزی خطی ذیل بهره می‌بریم:

$$\begin{cases} J_1 = \max(\theta_1 - \theta_2 + 0.600w_1 + 0.833w_2 + 0.800w_3 + 0.583w_4), \\ s.t. \quad \theta_1 - \theta_2 + 0.720w_1 + 0.677w_2 + w_3 + 0.417w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + w_1 + 0.417w_2 + 0.400w_3 + 0.913w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.818w_1 + 0.583w_2 + 0.667w_3 + 0.750w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.563w_1 + w_2 + 0.320w_3 + w_4 \le 0 \\ \qquad 0.1 \le w_1 \le 0.45, \;\; w_2 \le 0.2, \;\; 0.1 \le w_3 \le 0.4, \;\; w_4 \ge 0.03 \\ \qquad \sum_{j=1}^{4} \omega_j = 1, \;\; \omega_j \ge 0, \;\; j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

از روی مدل فوق نتیجه می‌شود که $J_1 = 0.0381 > 0$. به طور مشابه برای سایر گزینه‌های $x_i (i = 2, 3, 4, 5)$ داریم:

$$J_2 = -0.2850 < 0\,,\; J_3 = -0.0474 < 0\,,\; J_4 = -0.0225 > 0\,, J_5 = 0.01147 > 0$$

بنابراین، گزینه‌های x_2 و x_3 گزینه‌های مغلوب هستند که باید از مسئله حذف گردند. حال، به مجموعه گزینه‌های نامغلوب $\bar{X} = \{x_1, x_4, x_5\}$ می‌رسیم. اکنون، با تصمیم‌گیرنده تعامل کرده و فرض می‌کنیم تصمیم‌گیرنده گزینه‌های x_1 و x_4 را به x_5 ترجیح می‌دهد. بنابراین، $z_1(w) > z_5(w)$ و $z_4(w) > z_5(w)$ است، به عبارتی:

$$0.037w_1 - 0.167w_2 + 0.480w_3 - 0.417w_4 > 0$$
$$0.255w_1 - 0.417w_2 + 0.347w_3 - 0.250w_4 > 0$$

اکنون، این دو نابرابری را به عنوان اوزان معلوم شاخصه به مجموعه Φ اضافه می‌کنیم و برای مجموعه گزینه‌های تقلیل یافته $\bar{X} = \{x_1, x_4\}$ مجدداً با استفاده از قضیه (۳-۱) مدل برنامه‌ریزی خطی را تشکیل می‌دهیم:

۱) برای گزینه x_1 داریم:

$$\begin{cases} J_1 = \max(\theta_1 - \theta_2 + 0.600w_1 + 0.833w_2 + 0.800w_3 + 0.583w_4) \\ s.t. \quad \theta_1 - \theta_2 + 0.720w_1 + 0.667w_2 + w_3 + 0.417w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + w_1 + 0.417w_2 + 0.400w_3 + 0.917w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.818w_1 + 0.583w_2 + 0.667w_3 + 0.750w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.563w_1 + w_2 + 0.320w_3 + w_4 \le 0 \\ \qquad 0.037w_1 - 0.167w_2 + 0.480w_3 - 0.417w_4 > 0 \\ \qquad 0.255\omega_1 - 0.417\omega_2 + 0.347\omega_3 - 0.250\omega_4 > 0 \\ \qquad 0.1 \le \omega_1 \le 0.45, \ \ \omega_2 \le 0.2, \ \ 0.1 \le \omega_3 \le 0.4 \\ \qquad \omega_4 \ge 0.03, \ \ \sum_{j=1}^{4} \omega_j = 1, \ \ \omega_j \ge 0, \ \ j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

۲) برای گزینه x_4 داریم:

$$\begin{cases} J_4 = \max(\theta_1 - \theta_2 + 0.818w_1 + 0.583w_2 + 0.667w_3 + 0.750w_4) \\ s.t. \quad \theta_1 - \theta_2 + 0.600w_1 + 0.833w_2 + 0.800w_3 + 0.583w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.720w_1 + 0.667w_2 + w_3 + 0.417w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + w_1 + 0.417w_2 + 0.400w_3 + 0.917w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.563w_1 + w_2 + 0.320w_3 + w_4 \le 0 \\ \qquad 0.037w_1 - 0.167w_2 + 0.480w_3 - 0.417w_4 > 0 \\ \qquad 0.255\omega_1 - 0.417\omega_2 + 0.347\omega_3 - 0.250\omega_4 > 0 \\ \qquad 0.1 \le \omega_1 \le 0.45, \ \ \omega_2 \le 0.2, \ \ 0.1 \le \omega_3 \le 0.4 \\ \qquad \omega_4 \ge 0.03, \ \ \sum_{j=1}^{4} \omega_j = 1, \ \ \omega_j \ge 0, \ \ j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

با حل مدل، $J_4 = 0$ را بدست می‌آوریم. بنابراین گزینه x_1 مغلوب است که باید از مسئله حذف شود و به مجموعه گزینه‌های نامغلوب $\overline{X} = \{x_4\}$ می‌رسیم. بنابراین x_4 گزینه بهینه می‌باشد.

۳-۷ تصمیم‌گیری چندشاخصه تعاملی مبتنی بر درجه دستیابی[1] و پیچیدگی[2] گزینه‌ها

در این بخش، روش $MADM$ مبتنی بر درجات دستیابی و پیچیدگی گزینه‌ها در مواقعی که اطلاعات وزن شاخصه‌ها به طور کامل مشخص نیست، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. روش تعاملی[3] نه‌تنها می‌تواند به طور کافی از اطلاعات واقعی یا عینی معلوم استفاده کند، بلکه بدنبال تعاملات حداکثری با تصمیم‌گیرندگان است تا اطلاعات ذهنی آنان را لحاظ می‌نماید. تصمیم‌گیرندگان می‌توانند درجات دستیابی و پیچیدگی گزینه‌ها را به تدریج در فرآیند تصمیم‌گیری تعیین و اصلاح کنند. به همین دلیل نتایج تصمیم‌گیری معقول‌تر و منطقی‌تر خواهند بود.

۳-۷-۱ تعاریف و قضایا

روشهای حل مسائل $MADM$ به طور کلی به دنبال مقایسه و رتبه‌بندی مقادیر کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه است. در عین حال عدم قطعیت در اوزان شاخصه‌ها ممکن است منجر به عدم قطعیت در مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها گردد و همین امر ممکن است منجر به تولید اوزان متفاوت و نهایتا نتایج متفاوتی شود. در این مورد، مشارکت فعال تصمیم‌گیرندگان در فرایند تصمیم‌گیری و دخیل کردن محرکهای ذهنی خود در این فرآیند، نقش مهمی در دستیابی به تصمیمات معقول ایفا می‌کند.

برای بردار وزن شاخصه‌های $w \in \Phi$، هر چه مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ بیشتر باشد، بهتر است. طبق این فرض مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-3.20)} \begin{cases} \max\ z(w) = (z_1(w),\ z_2(w),\ \ldots,\ z_n(w)) \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

[1] Achievement Degrees
[2] Complex Degrees
[3] Interactive Method

تعریف ۳-۵ (ژوو، (۲۰۰۲)[1]) اگر وجود نداشته باشد هیچ $w \in \Phi$ به‌قسمی که $z_i(w) \geq z_i(w^0)$ و $w^{(0)} \in \Phi$ و حداقل یک نامساوی $z_{i_0}(w) > z_{i_0}(w^0)$ موجود باشد، آنگاه w^0 یک جواب موثر یا کارا[2] برای مدل (*M-3.20*) است.

تعریف ۳-٦ (ژوو، (۲۰۰۲)) مقدار سطح $\overline{z}_i$ از مقدار کلی شاخصه $z_i(w)$ برای گزینه x_i که مطلوب نظر تصمیم‌گیرنده بوده (و قصد رسیدن به آن را دارد)، را سطح انتظار[3] گزینه x_i می‌نامیم.

تعریف ۳-۷ (ژوو، (۲۰۰۲)) اگر داشته باشیم:

$$\varphi(z_i(w)) = \frac{z_i(w) - z_i^{\min}}{z_i - z_i^{\min}}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۳-۱۲)$$

آنگاه $\varphi(z_i(w))$ درجه دستیابی گزینه x_i نامیده می‌شود. تابع $\varphi(z_i(w))$ دارای ویژگیهای زیر است:

۱) درجه دستیابی گزینه x_i عملاً درصدی از مقادیر کلی شاخصه‌ها و سطح انتظار آن است. این تعریف با این فرض است که کمینه مقدار کلی شاخصه را به عنوان نقطه مرجع در نظر می‌گیرند. هر چه مقدار کلی شاخصه $z_i(w)$ از نقطه ایده‌آل منفی مقدار کلی شاخصه دورتر باشد، درجه دستیابی گزینه x_i بالاتر خواهد بود.

۲) به ازای $w^1, w^2 \in \Phi$، اگر $z_i(w^1) > z_i(w^2)$ باشد، آنگاه $\varphi(z_i(w^1)) > \varphi(z_i(w^2))$ است. به عبارتی $\varphi(z_i(w))$ تابع صعودی اکیداً یکنوا از $z_i(w)$ است.

تعریف ۳-۸ (ژوو، (۲۰۰۲)) اگر $c(w) = \sum_{i=1}^{n} (z_i(w) - z_i^{\min})$ باشد، آنگاه $c(w)$، درجه پیچیدگی گزینه x_i نامیده می‌شود.

[1] Xu (2002a)
[2] Efficient Solution
[3] Expectation Level

روشن است که درجه پیچیدگی $c(w)$، یک تابع صعودی اکیداً یکنوا از $z_i(w)$ است. بر اساس این تعریف، مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-3.21)}\ \begin{cases} \max\ c(w) \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

با حل مدل فوق، می‌توان جواب بهینه w، مقدار کلی شاخصه $z_i(w)$، درجه پیچیدگی $c(w)$ و درجه دستیابی $\varphi(z_i(w))$ گزینه x_i را بدست آورد. بر اساس این نتایج، تصمیم‌گیرنده مقادیر اولیه درجه دستیابی φ_i^0 و حد پایین c_0 درجه پیچیدگی $c(w)$ را تعیین می کند.

قضیه ۲-۳ (ژوو، (۲۰۰۲)[1]) جواب بهینه مدل تک‌هدفه (*M-3.21*)، جواب کارای مدل چندهدفه (*M-3.20*) است.

اثبات با استفاده از برهان خلف، اثبات را انجام می‌دهیم. اگر $w^{(0)}$ جواب کارای مدل (*M-3.20*) نباشد، آنگاه یک $w^{'} \in \Phi$ وجود دارد به قسمتی که به ازای هر i داریم $z_i(w^0) \leq z_i(w^{'})$، و یک i_0 وجود دارد به قسمتی که $z_{i_0}(w^0) < z_{i_0}(w^{'})$. از آنجاکه $c(w)$ تابع صعودی اکیداً یکنوا از $z_i(w)$ است، آنگاه $c(w^0) < c(w^{'})$ می‌باشد. بنابراین، w^0 جواب بهینه مدل تک هدفه (*M-3.21*) نیز نمی‌باشد، که با فرض مسئله در تناقض است. در نتیجه جواب بهینه مدل (*M-3.21*)، جواب کارای مدل (*M-3.20*) نیز است، که اثبات را کامل می‌کند.

بدیهی است هرچه درجه پیچیدگی $c(w)$ بیشتر باشد، به طور کلی گزینه‌ها بهتر می‌توانند نیازمندیهای تصمیم‌گیرندگان را برآورده سازند. اما این امر علی‌رغم نتایج خوبش، ممکن است باعث کمتر شدن مقادیر درجات دستیابی برخی از گزینه‌ها شود. از طرف دیگر، اگر تنها از درجات دستیابی به عنوان معیار استفاده شود، نمی‌توان تعادل خوبی بین گزینه‌ها برقرار ساخت. بنابراین، مدل تصمیم‌گیری تک‌هدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

[1] Xu (2002a)

$$\textbf{(M-3.22)}\begin{cases}\max\ J=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\\ s.t.\quad c(w)\ge c_0\\ \qquad \varphi(z_i(w))\ge\varphi_i\ge\varphi_i^0,\ i=1,2,...,n\\ \qquad w\in\Phi\end{cases}$$

اگر حل مدل (*M-3.22*) هیچ جوابی بدست ندهد، آنگاه تصمیم‌گیرنده باید درجات دستیابی اولیه $\varphi_i^0(i=1,2,...,n)$ و حد پایین c_0 درجات پیچیدگی $c(w)$ را اصلاح نماید؛ در غیر اینصورت قضیه ذیل صادق است:

قضیه ۳-۳ (ژوو، (۲۰۰۲)[1]) جواب بهینه مدل تک‌هدفه (*M-3.22*)، جواب کارای مدل چند هدفه (*M-3.20*) است.

اثبات مجدداً با استفاده از برهان خلف این قضیه را اثبات می‌کنیم. اگر $w^{(0)}$ جواب کارای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه (*M-3.20*) نباشد، آنگاه یک $w'\in\Phi$ وجود دارد به قسمی که به ازای هر i داریم $z_i(w^0)\le z_i(w')$ و یک i_0 وجود دارد به قسمی که $z_{i_0}(w^0)<z_{i_0}(w')$. از آنجاکه $c(w)$ و $\varphi(z_i(w))$ توابع صعودی اکیداً یکنوا از $z_i(w)$ هستند، بنابراین $c(w^0)<c(w')$ است و به ازای هر i داریم $\varphi(z_i(w^0))\le\varphi(z_i(w'))$ و $\varphi(z_{i_0}(w^0))<\varphi(z_{i_0}(w'))$. بنابراین، $c(w')\ge c_0$ می‌باشد و به ازای هر i، داریم $\varphi(z_i(w')\ge\varphi_i\ge\varphi_i^0$ و یک $\lambda_{i_0}^{'}$ وجود دارد به قسمی‌که $\varphi(z_{i_0}(w')\ge\varphi_{i_0}^{'}>\varphi_{i_0}\ge\varphi_i^0$ است. از این‌رو، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1,i\ne i_0}^{n}\varphi_i+\varphi_{i_0}^{'}>\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

[1] Xu (2002a)

که با فرض مسئله در تناقض است. بنابراین، جواب بهینه مسئله تک هدفه (*M-3.22*)، جواب کارای مسئله چند هدفه (*M-3.20*) است، که اثبات کامل می‌گردد.

قضایای (۳-۲) و (۳-۳) تضمین می‌کنند که جواب بهینه مسائل تک‌هدفه (*M-3.21*) و (*M-3.22*)، جوابهای کارای مسئله چندهدفه (*M-3.20*) باشند. اگر تصمیم‌گیرنده از نتایج حاصله، رضایت کافی داشته باشد، آنگاه می‌توانیم مقادیر کلی شاخصه‌ها بر روی هر گزینه را محاسبه و گزینه‌ها را مبتنی بر مقادیر کلی شاخصه‌ها و بطور نزولی رتبه‌بندی کرده تا گزینه‌های رضایت‌بخش را بیابیم. در غیراینصورت، تصمیم‌گیرنده می‌تواند به طور مناسبی مقادیر حد پایین درجات دستیابی برخی گزینه‌ها را افزایش داده و بطور همزمان درجات دستیابی برخی از گزینه‌ها را نیز کاهش دهد. همچنین، در صورت لزوم می‌توان مقادیر حد پایین درجات پیچیدگی گزینه‌ها را نیز تنظیم کرد. پس از آن، آنقدر مدل (*M-3.21*) را حل می‌کنیم تا به نتیجه مورد نظر تصمیم‌گیرنده دست یابیم.

۳-۷-۲ روش تصمیم‌گیری

بر اساس مدلها و قضایای فوق، در ادامه روش *MADM* تعاملی مبتنی بر درجه دستیابی و درجه پیچیدگی گزینه‌ها را معرفی خواهیم کرد (ژوو، (۲۰۰۲)[1]):

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، مقادیر گزینه‌های x_i نسبت به شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, ..., m)$ سنجیده شده و در ماتریس تصمیم $A=(a_{ij})_{n\times m}$ قرار می‌گیرند. سپس، با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۱-۳) ماتریس A را نرمال نموده و به ماتریس نرمال $R=(r_{ij})_{n\times m}$ دست یابید.

گام ۲) با استفاده از مدل (*M-3.8*)، مقادیر ایده‌آل منفی کلی شاخصه‌های $z_i^{\min}$ را بدست آورده و از تصمیم‌گیرنده بخواهید مقادیر سطح انتظار $\bar{z}_i$ را برای هر گزینه x_i بیان نماید.

---

[1] Xu (2002a)

گام ۳) مدل بهینه تک‌هدفه $(M\text{-}3.21)$ را حل کرده و جواب بهینه w^0، مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^0)$، و درجه پیچیدگی $c(w^0)$ را تعیین کنید. سپس، درجات دستیابی $\varphi(z_i(w^0))(i=1, 2, ..., n)$ برای گزینه‌های x_i را بدست آورید. در نهایت، تصمیم گیرنده، درجات دستیابی اولیه $\varphi_i^0(i=1, 2, ..., n)$ و مقادیر حد پایین درجات پیچیدگی را مبتنی بر اطلاعات بدست آمده تعیین می‌کند. در آخر $k=1$ را قرار دهید.

گام ٤) مدل بهینه تک‌هدفه $(M\text{-}3.22)$ را حل نموده و جواب بهینه w^k، درجه پیچیدگی $c(w^k)$ درجه دستیابی $\varphi(z_i(w^i))$ و بردار مقادیر کلی شاخصه‌های $z(w^k)$ متناظر هر گزینه را بدست آورید.

گام ۵) اگر تصمیم‌گیرنده احساس می‌کند نتایج فوق مطلوب است و پیشنهاد دیگری ندارد، به گام ۶ بروید؛ در غیر اینصورت تصمیم‌گیرنده می‌تواند به شکل مناسبی مقادیر حد پایین درجات دستیابی برخی گزینه‌ها را افزایش داده و به صورت همزمان مقادیر حد پایین درجات دستیابی برخی گزینه‌ها را کاهش دهد. در صورت لزوم می‌توان مقادیر حد پایین درجات پیچیدگی گزینه‌ها را نیز تنظیم نمود. اکنون $k=k+1$ قرار داده و به گام ۴ بروید.

گام ٦) تمام گزینه‌ها را منطبق بر مقادیر کلی شاخصه به صورت نزولی مرتب نمائید و بهترین گزینه را انتخاب کنید.

۳-۷-۳ مثال کاربردی

مثال ۷-۳ از مثال (۳-۵) برای تبیین روش فوق استفاده می‌کنیم، که شامل گامهای زیر است:

گام ۱) مطابق با گام اول بخش (۳-۵-۳) عمل می‌شود.

گام ۲) از مدل $(M\text{-}3.8)$ برای محاسبه مقادیر ایده‌آل منفی شاخصه‌های $z_i^{\min}$ استفاده نمائید.

$$z_1^{\min}=0.906\ ,\ z_2^{\min}=0.432\ ,\ z_3^{\min}=0.824\ ,\ z_4^{\min}=0.474\ ,\ z_5^{\min}=0.640$$

تصمیم‌گیرنده مقادیر سطوح انتظار $\overline{z}_i$ را به صورت زیر مشخص می‌کند:

$$\bar{z}_1 = 0.97\,,\ \bar{z}_2 = 0.65\,,\ \bar{z}_3 = 0.90\,,\ \bar{z}_4 = 0.55\,,\ \bar{z}_5 = 0.75$$

گام ۳) مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه (*M-3.21*) را حل کرده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$w^0 = (0.45,\ 0.15,\ 0.35,\ 0.05)$$

و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^0)$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$z_1(w^0) = 0.906\,,\ z_2(w^0) = 0.747\,,\ z_3(w^0) = 0.824$$
$$z_4(w^0) = 0.716\,,\ z_5(w^0) = 0.670$$

درجه پیچیدگی $c(w^0) = 0.586$ و درجات دستیابی $\varphi(z_i(w^0))$ به صورت زیر هستند:

$$\varphi(z_1(w^0)) = 0\,,\ \varphi(z_2(w^0)) = 1.445\,,\ \varphi(z_3(w^0)) = 0$$
$$\varphi(z_4(w^0)) = 3.184\,,\ \varphi(z_5(w^0)) = 0.266$$

که بر اساس آن تصمیم گیرنده درجات دستیابی اولیه را فراهم می‌کند یعنی:

$$\varphi_1^0 = 0.50\,,\ \varphi_2^0 = 0.90\,,\ \varphi_3^0 = 0.50\,,\ \varphi_4^0 = 2.00\,,\ \varphi_5^0 = 0.30$$

و همچنین مقدار حد پایین برای درجه پیچیدگی گزینه‌ها را برابر $c_0 = 0.50$ قرار می‌دهد.

گام ٤) مدل تصمیم‌گیری تک‌هدفه (*M-3.22*) را حل کرده و سپس جواب بهینه را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$w^1 = (0.45,\ 0,\ 0.35,\ 0.20)$$

مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w^1)$ برای گزینه‌ها به صورت زیر است:

$$z_1(w^1) = 0.940\,,\ z_2(w^1) = 0.641\,,\ z_3(w^1) = 0.880$$
$$z_4(w^1) = 0.652\,,\ z_5(w^1) = 0.675$$

درجه پیچیدگی $c(w^1) = 0.51$ و درجات دستیابی $\varphi(z_i(w^1))$ به صورت زیر هستند:

$$\varphi(z_1(w^1)) = 0.530\,,\ \varphi(z_2(w^1)) = 0.959\,,\ \varphi(z_3(w^1)) = 0.737$$

$$\varphi(z_4(w^1)) = 2.342\,,\ \varphi(z_5(w^1)) = 0.312$$

که موجب رضایت تصمیم‌گیرنده می‌باشد. اکنون، گزینه‌ها را طبق مقادیر کلی بدست آمده به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_2$$

که x_1 بهترین گزینه می‌باشد.

بخش دوم

روشها و کاربردهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد فاصله‌ای

فصل چهارم

حل مسائل *MADM* فاصله‌ای با اطلاعات مقادیر حقیقی اوزان

همزمان با توسعه حوزه‌های اجتماعی و اقتصادی در جوامع بشری، پیچیدگی و عدم قطعیت مسائل این حوزه‌ها و فازی بودن تفکر انسان نیز بیش از پیش در حال افزایش است. در چنین شرایطی، بعضاً اطلاعات لازم برای تصمیم‌گیریهای کاربردی در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شوند و این موضوعی است که برخی محققان به آن توجه داشته‌اند. در این فصل، مفاهیم نقطه ایده‌آل مثبت با مقادیر فاصله‌ای[1] و نقطه ایده‌آل منفی با مقادیر فاصله‌ای[2] ، روابط میان فرمولهای درجه امکان[3] برای مقایسه اعداد فاصله‌ای و سپس روشهای *MADM* مبتنی بر درجات امکان، مدل اَفکنش یا نگاشت[4] ، تاپسیس فاصله‌ای[5] و عملگرهای *UBM*[6] را معرفی خواهیم کرد. افزون بر این، مدلهای بهینه‌سازی را برای کمینه کردن عدم توافق گروهی[7] به منظور استخراج اوزان طبق نظر خبرگان توسعه می‌دهیم. در پایان هر مبحث نیز روشها و مدلهای پیشنهادی را در قالب مثالهای کاربردی و با جزئیات بیشتر تشریح خواهیم کرد.

---

[1] Interval- Valued Positive Ideal Point
[2] Interval-Valued Negative Ideal Point
[3] Possibility Degree
[4] Projection Model
[5] Interval TOPSIS
[6] Uncertain Bonferroni Mean (UBM)
[7] UBM Operators

٤-١ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر درجات امکان

٤-١-١ فرمولهای درجه امکان برای مقایسه اعداد فاصله‌ای

فرض کنید $\tilde{a}=[a^L, a^U]=\{x\,|\,0\le a^L\le x\le a^U,\ a^L, a^U\in\Re\}$ باشد، در اینصورت $\tilde{a}$ یک عدد فاصله‌ای نامیده می‌شود. اگر $a^L=a^U$ باشد، آنگاه $\tilde{a}$ به یک عدد حقیقی تقلیل می‌یابد.

در ابتدا، قوانین عملیاتی اعداد فاصله‌ای را بیان می‌کنیم (ژوو و ژای، (۱۹۹۲)[1]):

دو عدد فاصله‌ای $\tilde{a}=[a^L, a^U]$ و $\tilde{b}=[b^L, b^U]$ و نیز $\beta\ge 0$ را در نظر بگیرید. آنگاه خواهیم داشت:

۱) تساوی $\tilde{a}=\tilde{b}$ برقرار است، اگر و تنها اگر $a^L=b^L$ و $a^U=b^U$ باشد.

۲) تساوی $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^L+b^L, a^U+b^U]$ برقرار است.

۳) تساوی $\beta\tilde{a}=[\beta a^L, \beta b^L]$ زمانی که $\beta\ge 0$ است، برقرار می‌باشد. خصوصاً زمانی که مقدار $\beta=0$ باشد، آنگاه $\beta\tilde{\alpha}=0$ است.

۴) تساوی $\tilde{a}\tilde{b}=[a^L, a^U]\cdot[b^L, b^U]=[a^Lb^L, a^Ub^U]$ برقرار است.

۵) همچنین، تساوی $\tilde{a}^\beta=[a^L, a^U]^\beta=[(a^L)^\beta, (a^U)^\beta]$ برقرار است.

تعریف ٤-١ (ژوو، (۲۰۰۲)[2]) اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ اعداد حقیقی باشند، آنگاه رابطه:

$$p(\tilde{a}>\tilde{b})=\begin{cases}1, & if\ \ \tilde{a}>\tilde{b},\\ \dfrac{1}{2}, & if\ \ \tilde{a}=\tilde{b},\\ 0, & if\ \ \tilde{a}<\tilde{b}\end{cases} \tag{۴-۱}$$

[1] Xu and Zhai (1992)
[2] Xu (2002b)

را درجه امکان $\tilde{a} > \tilde{b}$ می‌نامیم.

تعریف ۲-٤ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[1]) اگر هر دو مقدار $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ اعداد فاصله‌ای باشند و یا یکی از آنها عدد فاصله‌ای باشد، به قسمی که $\tilde{a}=[a^L, a^U]$ و $\tilde{b}=[b^L, b^U]$ باشد و اگر فرض کنیم $l_{\tilde{a}} = a^U - a^L$ و $l_{\tilde{b}} = b^U - b^L$ باشد، آنگاه رابطه:

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \frac{\min\left\{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}},\ \max\left\{a^U - b^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}} \qquad (۴-۲)$$

درجه امکان $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ نامیده می‌شود، و فرض کنید رابطه ترتیبی[2] میان $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ را بصورت $\tilde{a} \underset{p}{\geq} \tilde{b}$ باشد.

دا و لیو[3] و فاچینتی و همکارانش[4] به‌منظور مقایسه اعداد فاصله‌ای، دو فرمول برای درجه امکان پیشنهاد دادند. این فرمولها در زیر ارائه می شود.

تعریف ۳-٤ (فاچینتی و همکاران، (۱۹۹۸)) اگر داشته باشیم:

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \min\left\{\max\left\{\frac{a^U - b^L}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}}, 0\right\}, 1\right\} \qquad (۴-۳)$$

آنگاه رابطه $p(\tilde{a} \geq \tilde{b})$، درجه امکان $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ نامیده می‌شود.

تعریف ٤-٤ (دا و لیو، (۱۹۹۹)[5]) فرض کنید داریم:

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \frac{\max\left\{0,\ l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}} - \max\left\{b^U - a^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}} \qquad (۴-۴)$$

[1] Xu and Da (2003d)
[2] Order Relation
[3] Da and Liu (1999)
[4] Facchinetti et al. (1998)
[5] Da and Liu (1999)

باشد، آنگاه رابطه $p(\tilde{a} \geq \tilde{b})$ ، درجه امکان $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ نامیده می‌شود.

از روی تعاریف فوق، قضایای زیر را می‌توان اثبات نمود:

قضیه ۴-۱ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[1]) اگر $\tilde{a} = [a^L, a^U]$ و $\tilde{b} = [b^L, b^U]$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

۱) $0 \leq p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \leq 1$.

۲) $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = 1$ است، اگر و تنها اگر $b^U \leq a^L$ باشد.

۳) $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = 0$ است، اگر و تنها اگر $a^U \leq b^L$ باشد.

۴) تساوی $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) + p(\tilde{b} \geq \tilde{a}) = 1$ برقرار است. به عنوان نتیجه داریم $p(\tilde{a} \geq \tilde{a}) = \frac{1}{2}$.

۵) نامساوی $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \geq \frac{1}{2}$ برقرار است، اگر و تنها اگر $a^U + a^L \geq b^U + b^L$ باشد. به‌عنوان نتیجه داریم $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \frac{1}{2}$ ، اگر و تنها اگر $a^U + a^L = b^U + b^L$ باشد.

۶) برای سه عدد فاصله‌ای $\tilde{a}$، $\tilde{b}$ و $\tilde{c}$، اگر $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \geq \frac{1}{2}$ و $p(\tilde{b} \geq \tilde{c}) \geq \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $p(\tilde{a} \geq \tilde{c}) \geq \frac{1}{2}$ است.

در ادامه روابط موجود بین تعاریف (۴-۲) تا (۴-۴) را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴-۲ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)) تعاریف (۴-۲) تا (۴-۴) معادل یکدیگرند، به عبارتی معادله (۴-۴) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۳) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۲).

---

[1] Xu and Da (2003d)

اثبات ابتدا ثابت می‌کنیم معادله (۴-۲) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۴). طبق معادله (۴-۲) داریم:

$$\begin{aligned} p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) &= \frac{\min\left\{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}},\ \max\left\{a^U-b^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}} \\ &= \min\left\{\frac{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}},\ \frac{\max\left\{a^U-b^L, 0\right\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}\right\} \\ &= \min\left\{1,\ \max\left\{\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}, 0\right\}\right\} \end{aligned}$$

به عبارتی:

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \min\left\{\max\left\{\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}, 0\right\},\ 1\right\}$$

و بنابراین، معادله (۴-۲) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۳) است.

حال اثبات می‌کنیم که معادله (۴-۳) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۴). با استفاده از معادله (۴-۳)، معادله (۴-۲) $\Leftrightarrow$ (۴-۳) و از روی قانون متمم درجات امکان داریم:

$$\begin{aligned} p(\tilde{b} \geq \tilde{a}) &= 1 - p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \\ &= 1 - \min\left\{\max\left(\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}, 0\right), 1\right\} \\ &= 1 - \frac{\min\left\{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}},\ \max\left\{a^U-b^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}} \\ &= \frac{\max\left\{0,\ l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}-\max\left\{a^U-b^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}} \end{aligned}$$

به عبارتی:

$$p(\tilde{b} \geq \tilde{a}) = \frac{\max\left\{0,\ l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}-\max\left\{a^U-b^L, 0\right\}\right\}}{l_{\tilde{a}}+l_{\tilde{b}}}$$

و بنابراین معادله (۴-۳) $\Leftrightarrow$ معادله (۴-۴). بدین صورت اثبات کامل می‌شود.

به‌طور مشابه، در ادامه تعریفی را بیان می‌کنیم و می‌توان اثبات کرد که این تعریف معادل تعاریف (۴-۲) تا (۴-۴) است.

تعریف ٥-٤ (دا و لیو، (۱۹۹۹)[1]) اگر داشته باشیم:

$$p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = \max \left\{ 1 - \max \left\{ \frac{b^U - a^L}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}} \, , 0 \right\} , \; 0 \right\} \qquad (۴\text{-}۵)$$

آنگاه $p(\tilde{a} \geq \tilde{b})$ درجه امکان $\tilde{a} \geq \tilde{b}$ نامیده می‌شود.

٤-۱-۲ رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای

برای رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای عملاً می توان از طریق جستجوی بردار اولویت در ماتریس حاوی درجات امکان عمل نمود. فرض کنید یک دسته اعداد فاصله‌ای بصورت $\left(i = 1, 2, ..., n \right)$ $\tilde{a}_i = [a_i^L , a_i^U]$ داریم. حال آنها را به صورت زوجی مقایسه کرده و با استفاده از روابط تعاریف (۴-۲) تا (۴-۵) درجه امکان $p(\tilde{a}_i \geq \tilde{a}_j)$ را محاسبه می‌کنیم، که این درجه امکان برای اختصار بیشتر بصورت p_{ij} $\left(i, \; j = 1, 2, ..., n \right)$ نمایش داده شده و از روی آن ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n \times n}$ تشکیل می‌شود. این ماتریس حاوی تمامی اطلاعات درجه امکان بدست آمده از مقایسه گزینه‌هاست. بنابراین، مسئله رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای می‌تواند به مسئله پیدا کردن بردار اولویت یک ماتریس درجه امکان تبدیل گردد. قضیه (۴-۱) بیان می‌دارد که ماتریس P یک رابطه ترجیح فازی است. در فصل دوم، نظریه اولویت‌بندی برای روابط ترجیح فازی را با جزئیات بیان کردیم. در اینجا، از رابطه اولویت‌بندی ساده (۲-۶) که در بخش (۲-۱-۱) بیان شده برای محاسبه بردار اولویت ماتریس P استفاده می‌کنیم. یعنی:

[1] Da and Liu (1999)

$$v_i = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \frac{n}{2} - 1\right), \;\; i = 1, 2, ..., n \qquad (۴-۶)$$

که از روی رابطه فوق بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ مربوط به ماتریس درجه امکان P را بدست می‌آوریم و از روی آن، اعداد فاصله‌ای $\tilde{a}_i (i = 1, 2, ..., n)$ را بر اساس مقادیر v_i رتبه‌بندی می‌کنیم.

۳-۱-٤ روش تصمیم‌گیری

اکنون، بر اساس مفهوم درجه امکان مقایسه اعداد فاصله‌ای، یک روش *MADM* با گامهای زیر را معرفی می‌کنیم (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[1]):

گام ۱) یک مسئله *MADM* را در نظر بگیرید که در آن اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً معلوم بوده و در قالب اعداد حقیقی بیان می‌شوند. برای هر گزینه x_i، مقدار هر شاخصه u_j، بصورت $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ بیان می‌شود (که به آن عملکرد گزینه در قبال شاخصه می‌گویند) و تمامی $\tilde{a}_{ij} (i = 1, 2, ..., n, \; j = 1, 2, ..., m)$ها در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ قرار دارند. رایج‌ترین نوع شاخصه‌ها در اینجا شاخصه‌هایی از جنس سود و هزینه هستند. فرض کنید $I_i (i = 1, 2)$ نشان‌دهنده دو زیرمجموعه باشد که یکی از آنها برای زیرمجموعه شاخصه‌های سود و دیگری برای شاخصه‌های هزینه باشد.

به منظور بی‌مقیاس‌سازی شاخصه‌ها و سهولت مقایسات بین آنها، ماتریس تصمیم را نرمال نموده که منتج به ماتریس نرمال $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ می‌شود. برای نرمال‌سازی از روابط زیر استفاده شود:

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij}}{\left\|\tilde{a}_j\right\|}, \;\; i = 1, 2, ..., n, \;\; j \in I_1 \qquad (۴-۷)$$

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{1/\tilde{a}_{ij}}{\left\|1/\tilde{a}_j\right\|}, \;\; i = 1, 2, ..., n, \;\; j \in I_2 \qquad (۴-۸)$$

[1] Xu and Da (2003d)

$$\left\| \tilde{a}_j \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^2}, \quad j \in I_1, \quad \left\| 1/\tilde{a}_j \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(1/\tilde{a}_{ij}\right)^2}, \quad j \in I_2$$

بر اساس قوانین عملیاتی اعداد فاصله‌ای، روابط (۴–۷) و (۴–۸) را به فرمولهای زیر تبدیل کنید:

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{a_{ij}^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^U)^2}}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{a_{ij}^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^L)^2}}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \in I_1 \tag{۴–۹}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{1/a_{ij}^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1/a_{ij}^L)^2}}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{1/a_{ij}^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1/a_{ij}^U)^2}}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \in I_2 \tag{۴–۱۰}$$

یا (فن و ژانگ، (۱۹۹۹)[1])

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \in I_1 \tag{۴–۱۱}$$

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{1/\tilde{a}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \left(1/\tilde{a}_{ij}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \in I_2 \tag{۴–۱۲}$$

بر اساس قوانین عملیاتی اعداد فاصله‌ای، روابط (۴–۱۱) و (۴–۱۲) را نیز به فرمولهای زیر تبدیل کنید:

[1] Fan and Zhang (1999)

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{a_{ij}^L}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ij}^U)}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{a_{ij}^U}{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ij}^L)}, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n, \quad j \in I_1 \tag{۴-۱۳}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = \dfrac{1/a_{ij}^U}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1/a_{ij}^L)}, \\ r_{ij}^U = \dfrac{1/a_{ij}^L}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1/a_{ij}^U)}, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n, \quad j \in I_2 \tag{۴-۱۴}$$

گام ۲) از عملگر میانگین وزنی غیرقطعی[1] (UWA) به منظور تلفیق مقادیر شاخصه‌ها برای هر گزینه x_i استفاده کرده و مقادیر کلی (عملکرد همه) شاخصه‌ها (برای هر گزینه) یعنی $\tilde{z}_i(w)$ را بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_{ij} \quad i=1,2,\dots,n \tag{۴-۱۵}$$

گام ۳) از فرمول درجه امکان (۴-۲) برای مقایسه مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w)$ استفاده کرده و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید. در اینجا رابطه $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w) \ge \tilde{z}_j(w))$ برقرار است.

گام ٤) از رابطه (۴-۶) به منظور دستیابی به بردار اولویت $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ماتریس درجه امکان P استفاده کنید و گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر v_i به صورت نزولی مرتب کرده و بهترین گزینه را بدست آورید.

---

[1] Uncertain Weighted Averaging (UWA)

٤-۱-٤ مثال کاربردی

در این بخش با استفاده از الگوریتم فوق، یک مسئله $MADM$ را به منظور ارزیابی اعضاء هیأت علمی یک دانشگاه برای انتصاب و ارتقاء تشریح خواهیم کرد.

سه شاخصه مورد استفاده در برخی دانشگاه‌ها ، عبارتند از: (۱) u_1: تدریس، (۲) u_2: تحقیق، (۳) u_3: خدمات، که بردار وزن این شاخصه‌ها به صورت $w=(0.4, 0.4, 0.2)$ است. قرار است پنج عضو هیأت علمی (گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$) با استفاده از اعداد فاصله‌ای ارزیابی شوند. ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{5\times3}$ در جدول (۴-۱) نشان داده شده است.

جدول ۱-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.214, 0.220]	[0.166, 0.178]	[0.184, 0.190]
x_2	[0.206, 0.225]	[0.220, 0.229]	[0.182, 0.191]
x_3	[0.195, 0.204]	[0.192, 0.198]	[0.220, 0.231]
x_4	[0.181, 0.190]	[0.195, 0.205]	[0.185, 0.195]
x_5	[0.175, 0.184]	[0.193, 0.201]	[0.201, 0.211]

با استفاده از فرمول $\tilde{z}_i(w)=\sum_{j=1}^{3} w_j\tilde{r}_{ij}$ مقادیر کلی شاخصه‌ها را برای اعضاء هیأت علمی مسئله به صورت اعداد فاصله‌ای بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(w)=[0.1888,\ 0.1972],\ \ \tilde{z}_2(w)=[0.2068,\ 0.2198]$$
$$\tilde{z}_3(w)=[0.1988,\ 0.2070],\ \ \tilde{z}_4(w)=[0.1874,\ 0.1970]$$
$$\tilde{z}_5(w)=[0.1874,\ 0.1962]$$

به منظور رتبه‌بندی گزینه‌ها، ابتدا از معادله (۴-۲) برای مقایسه هر جفت از $\tilde{z}_i(w)$ ها استفاده می‌کنیم. پس از آن، ماتریس درجه امکان P را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5444 & 0.5698 \\ 1 & 0.5 & 0.9906 & 1 & 1 \\ 1 & 0.0094 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.4556 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5217 \\ 0.4302 & 0 & 0 & 0.4783 & 0.5 \end{pmatrix}$$

سپس، با استفاده از معادله (۴-۶)، بردار اولویت ماتریس درجه امکان P را بدست می‌آوریم:

$$v = (0.1557,\ 0.2995,\ 0.2505,\ 0.1489,\ 0.1454)$$

بر اساس بردار اولویت و درجات امکان در ماتریس P، رتبه گزینه‌ها را در غالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ به صورت زیر داریم:

$$\tilde{z}_2(w) \underset{0.9906}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{1}{\geq} \tilde{z}_1(w) \underset{0.5444}{\geq} \tilde{z}_4(w) \underset{0.5217}{\geq} \tilde{z}_5(w)$$

اگر از نماد $\underset{p}{\succ}$ به منظور نشان دادن روابط اولویت میان گزینه‌ها با مقادیر درجات امکان استفاده کنیم، آنگاه رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_2 \underset{0.9906}{\succ} x_3 \underset{1}{\succ} x_1 \underset{0.5444}{\succ} x_4 \underset{0.5217}{\succ} x_5$$

که x_2 بهترین گزینه است.

٤-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر مدل نگاشت

٤-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

ابتدا ماتریس تصمیم نرمال وزندار $\tilde{Y} = (\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$ را که در آن $\tilde{y}_{ij} = [y_{ij}^L, y_{ij}^U]$ و $\tilde{y}_{ij} = w_j\ \tilde{r}_{ij}$ می‌باشد، تشکیل می‌دهیم.

تعریف ٤-٦ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[1]) مقادیر $\tilde{y}^{+}=(\tilde{y}_1^{+}, \tilde{y}_2^{+}, ..., \tilde{y}_m^{+})$ را نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای[2] می‌نامیم، که در آن:

$$\tilde{y}_j^{+}=[y_j^{+L}, y_j^{+U}]=[\max_i(y_{ij}^{L}), \ \max(y_{ij}^{U})], \quad j=1, 2, ..., m \tag{۴-۱۶}$$

حال در مورد "جهت" و "اندازه بردارها" دو تعریف زیر را یادآوری می کنیم.

تعریف ٤-٧ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)) دو بردار $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ و $\beta=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ را در نظر بگیرید، در این صورت، کسینوس زاویه دو بردار (بعنوان معیاری برای تشابه جهت بردارها) بصورت زیر تعریف می شود:

$$\cos(\alpha, \beta)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}} \tag{۴-۱۷}$$

تعریف ٤-٨ فرض کنید داریم $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$، آنگاه $|\alpha|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}$ را اندازه مدولار بردار α می‌نامیم.

همانطور که می‌دانیم هر بردار دارای "جهت و اندازه مدولار" است. لیکن معیار $\cos(\alpha, \beta)$ فقط میزان تشابه میان «جهت» بردارهای α و β را مشخص می‌کند. لذا به منظور محاسبه درجه تشابه کلی بین دو بردار α و β، در ادامه فرمول تصویر یا افکنش بردار α بر روی بردار β را معرفی می‌کنیم:

تعریف ٤-٩ (ژوو و دا، (۲۰۰۳)) دو بردار $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ و $\beta=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ را در نظر بگیرید، حال رابطه زیر:

[1] Xu and Da (2003c)
[2] Interval- Valued Positive Ideal Point

$$\Pr\ j_\beta(\alpha)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}} \tag{۴-۱۸}$$

را تصویر یا افکنش بردار α بر روی بردار β می‌نامیم. در حالت کلی، هرچه مقدار $\Pr\ j_\beta(\alpha)$ بیشتر باشد، بردار α به بردار β نزدیک‌تر است. فرض کنید رابطه زیر را داشته باشیم:

$$\Pr\ j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m}[\tilde{y}_{ij}^L y_j^{+L}+\tilde{y}_{ij}^U y_j^{+U}]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}[(\tilde{y}_j^L)^2+(\tilde{y}_{ij}^{+U})^2]}} \tag{۴-۱۹}$$

که در رابطه فوق $\tilde{y}_i=(\tilde{y}_{i1},\tilde{y}_{i2},...,\tilde{y}_{im})$ به ازای $i=1,2,...,n$ است. بدیهی است که هرچه مقدار $\Pr\ j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_i)$ بیشتر باشد، گزینه x_i به نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای $\tilde{y}^+$ نزدیک‌تر است. بنابراین، گزینه x_i بهترین گزینه است.

طبق تعریف فوق، در ادامه، یک روش *MADM* مبتنی بر مدل تصویر ارائه می‌کنیم (ژوو و دا، (۲۰۰۳)[۱]).

گام ۱) یک مسئله *MADM* را در نظر بگیرید که در آن اطلاعات وزن در مورد شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است. تصمیم‌گیرنده، گزینه‌های $x_i(i=1,2,...,n)$ را با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j(j=1,2,...,m)$ ارزیابی کرده و ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد. حال می‌توانیم با استفاده از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰)، ماتریس $\tilde{A}$ را به ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال[۲] $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ تبدیل نمائیم.

---

[1] Xu and Da (2003c)

[2] Normalized Uncertain Decision Matrix

گام ۲) از بردار وزن شاخصه w و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$ برای تشکیل ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال وزن‌دار[1] $\tilde{Y}=(\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$ استفاده کنید.

گام ۳) از معادله (۴-۱۶)، برای محاسبه نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای $\tilde{y}^{+}$ استفاده کنید.

گام ٤) از معادله (۴-۱۹) برای محاسبه تصویر گزینه x_i روی نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای $\tilde{y}^{+}$، یعنی $(i=1, 2, ..., n)$ $\mathrm{Pr}\ j_{\tilde{y}^{+}}(\tilde{y}_i)$، استفاده کنید.

گام ۵) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر بدست آمده $\mathrm{Pr}\ j_{\tilde{y}^{+}}(\tilde{y}_i)$ رتبه‌بندی و در نهایت بهترین گزینه را انتخاب نمائید.

۲-۲-٤ مثال کاربردی

مثال ۲-٤ طراحی با قابلیت نگهداری[2] بدین معنی است که در فرآیند توسعه محصول، طراح باید تمامی جوانب و عوامل مهم طراحی شامل ساختار کلی سیستم، نحوه آماده‌سازی قطعات، چگونگی ارتباط تمام قطعات و اجزاء سیستم، استانداردسازی و ماژول‌بندی[3] را در نظر بگیرد تا کاربران بتوانند در صورت خرابی محصول، عملکرد آن را به حالت اولیه برگردانند. در این مسئله، سه گونه روش طراحی با قابلیت نگهداری وجود دارد که باید یکی از این روشها را انتخاب کنیم. شاخصه‌های موردنظر برای انتخاب این روشهای طراحی (دوو و همکاران، (۱۹۹۹)[4]) عبارتند از: (۱) u_1: هزینه چرخه عمر (بر حسب هزار دلار)، (۲) u_2: میانگین طول عمر (بر حسب ساعت)، (۳) u_3: میانگین زمان تعمیر (بر حسب ساعت)، (۴) u_4: در دسترس بودن و (۵) u_5: عملکرد جامع.
ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ در جدول (۴-۲) نشان داده شده است. بردار وزن معلوم شاخصه‌ها به صورت زیر است:

[1] Weighted Normalized Uncertain Decision Matrix
[2] Maintainability Design
[3] Modularization
[4] Du et al. (1999)

$$w = (0.2189, 0.2182, 0.1725, 0.2143, 0.1761)$$

در میان این شاخصه‌های $u_j (j = 1, 2, 3, 4, 5)$، می‌توان گفت که u_1 و u_3 از جنس هزینه و باقی شاخصه‌ها از جنس سود هستند.

جدول ۲-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[58.9, 59.0]	[200, 250]	[1.9, 2.1]	[0.990, 0.991]	[0.907, 0.909]
x_2	[58.5, 58.7]	[340, 350]	[3.4, 3.5]	[0.990, 0.992]	[0.910, 0.912]
x_3	[58.0, 58.5]	[290, 310]	[2.0, 2.2]	[0.992, 0.993]	[0.914, 0.917]

جدول ۳-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.5721, 0.5757]	[0.3772, 0.5106]	[0.6080, 0.1265]	[0.5762, 0.5775]	[0.5738, 0.5765]
x_2	[0.5750, 0.5796]	[0.6413, 0.7149]	[0.3648, 0.4098]	[0.5762, 0.5781]	[0.5757, 0.5784]
x_3	[0.5770, 0.5846]	[0.5470, 0.6332]	[0.5803, 0.6967]	[0.5774, 0.5787]	[0.5782, 0.5816]

حال، از روش معرفی شده در بخش (۴-۲-۱) برای انتخاب روش مناسب طراحی استفاده می‌کنیم. گامهای تصمیم‌گیری به صورت زیر هستند:

گام ۱) از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰) برای تبدیل ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ به ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$ استفاده می‌کنیم، که در جدول (۴-۳) نشان داده شده است.

گام ۲) ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال وزن‌دار $\tilde{Y}$، همان جدول (۴-۴)، را با استفاده از بردار وزن شاخصه‌های w و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$ به صورت زیر بدست می‌آوریم:

جدول ٤-٤ ماتریس تصمیم نرمال وزن‌دار $\tilde{Y}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.1252, 0.1260]	[0.0823, 0.1114]	[0.1049, 0.1265]	[0.1235, 0.1238]	[0.1010, 0.1015]
x_2	[0.1259, 0.1269]	[0.1399, 0.1560]	[0.0629, 0.0707]	[0.1235, 0.1239]	[0.1014, 0.1019]
x_3	[0.1263, 0.1280]	[0.1194, 0.1382]	[0.1001, 0.1202]	[0.1237, 0.1240]	[0.1018, 0.1024]

گام ۳) نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای را با استفاده از معادله (۴-۱۶) بدست می‌آوریم:

$$\tilde{y}^+ = ([0.1263, 0.1280],\ [0.1399, 0.1560],\ [0.1049, 0.1265],\ [0.1237, 0.1240],\ [0.1018, 0.1024])$$

گام ٤) تصویرهای $\Pr j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_i)$ را با استفاده از معادله (۴-۱۹) بدست می‌آوریم:

$$\Pr j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_1) = 0.3537\ ,\ \Pr j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_2) = 0.2717\ ,\ \Pr j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_3) = 0.3758$$

گام ٥) طرحهای سه‌گانه (x_i) را بر اساس مقادیر $\Pr j_{\tilde{y}^+}(\tilde{y}_i)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2$$

بنابراین، روش x_3 از دو روش طراحی دیگر بهتر است.

٤-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر روش تاپسیس فاصله‌ای

٤-۳-۱ روش تصمیم‌گیری

تعریف ٤-۱۰ بردار $\tilde{y}^{-}=(\tilde{y}_1^{-},\tilde{y}_2^{-},\ldots,\tilde{y}_m^{-})$ نقطه ایده‌آل منفی فاصله‌ای نامیده می‌شود، که در آن:

$$\tilde{y}_j^{-}=[y_j^{-L},\, y_j^{-U}]=[\min_i(y_{ij}^{L}),\ \min_i(y_{ij}^{U})]\,,\quad j=1,2,\ldots,n \qquad (۴-۲۰)$$

حال به معرفی یک روش *MADM* مبتنی بر تکنیک تاپسیس فاصله‌ای می‌پردازیم. (تاپسیس[1] برگرفته از سرواژه عبارتی است که به معنای: اولویت‌بندی گزینه‌ها براساس شباهت به حل ایده‌آل است (هووانگ و یوون، (۱۹۸۱)[2])). گامهای این روش به شکل زیر هستند:

گام ۱) یک مسئله *MADM* را در نظر بگیرید که در آن اطلاعات وزن روی شاخصه‌ها کاملاً معین است. ماتریسهای $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ و $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را به ترتیب ماتریس تصمیم غیرقطعی و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال می‌نامند.

گام ۲) ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال وزن‌دار $\tilde{Y}=(\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$ را با استفاده از بردار وزن شاخصه‌ها و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال بدست آورید.

گام ۳) از معادلات (۴-۱۶) و (۴-۲۰) برای محاسبه نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای $\tilde{y}^{+}$ و نقطه ایده‌آل منفی فاصله‌ای $\tilde{y}^{-}$ استفاده نمائید.

گام ٤) فاصله هر گزینه را با نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای و نقطه ایده‌آل منفی فاصله‌ای به صورت زیر محاسبه کنید:

---

1 TOPSIS (the Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution)
2 Hwang and Yoon (1981)

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^{m} \left\| \tilde{y}_{ij} - \tilde{y}_j^+ \right\| = \sum_{j=1}^{m} \left[\left| y_{ij}^L - y_j^{+L} \right| + \left| y_{ij}^U - y_j^{+U} \right| \right], \ \ i = 1, 2, ..., n \qquad (۴-۲۱)$$

$$D_i^- = \sum_{j=1}^{m} \left\| \tilde{y}_{ij} - \tilde{y}_j^+ \right\| = \sum_{j=1}^{m} \left[\left| y_{ij}^L - y_j^{-L} \right| + \left| y_{ij}^U - y_j^{-U} \right| \right], \ \ i = 1, 2, ..., n \qquad (۴-۲۲)$$

گام ۵) درجه نزدیکی هرکدام از گزینه‌ها را با نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای به صورت زیر محاسبه نمائید:

$$c_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۴-۲۳)$$

گام ٦) گزینه‌های x_i را بر حسب مقادیر c_i محاسبه شده در گام پنجم رتبه‌بندی کنید. هرچه c_i بزرگتر باشد، گزینه x_i نیز بهتر است.

۲-۳-٤ مثال کاربردی

مثال ۳-٤ مسئولان محلی بدنبال توسعه منطقه‌ای سرشار از پوست خام (دباغی نشده) هستند. به منظور توسعه صنعت چرم در این منطقه، پنج گزینه ($x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$) برای انتخاب به آنان پیشنهاد شده است. همچنین، با در نظر گرفتن توزیع منابع تولید و دیگر عوامل مرتبط با صنعت چرم، هشت شاخصه به صورت زیر برای ارزیابی گزینه‌ها مشخص شده است: (۱) u_1: تقاضای انرژی، (۲) u_2: تقاضای آب، (۳) u_3: چگونگی تخلیه پساب، (۴) u_4: هزینه کارخانه و تجهیزات، (۵) u_5: هزینه عملیات، (۶) u_6: توسعه اقتصادی منطقه، (۷) u_7: فرصتهای تحقیق و توسعه و (۸) u_8: بازگشت سرمایه.

بردار وزن شاخصه‌ها به صورت زیر داده شده است:

$$w = (0.10, 0.12, 0.15, 0.13, 0.17, 0.11, 0.12, 0.10)$$

مقادیر شاخصه‌ها برای هر گزینه نیز در جدول (۴-۵) نشان داده شده است. در میان این شاخصه‌ها، شاخصه اول، دوم، چهارم و پنجم از جنس هزینه و مابقی از جنس سود هستند. در ادامه، از روش بیان شده در بخش (۴-۳-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰)، ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ را به ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$ تبدیل می‌کنیم، که در جدول (۴-۶) قابل مشاهده است:

جدول ٤-٥ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[1.5, 1.9]	[9, 9.5]	[8, 9]	[10, 12]	[12,13]	[8, 9]	[2, 3]	[1.2, 1.3]
x_2	[2.7, 3.1]	[5, 6]	[9, 9.5]	[4, 5]	[4, 5]	[7, 8]	[9, 10]	[1.1, 1.2]
x_3	[1.8, 2]	[8.5,9.1]	[7, 8]	[8, 9]	[9, 10]	[8.5, 9]	[5, 6]	[1, 1.3]
x_4	[2.5, 2.8]	[5, 6]	[9, 10]	[6, 7]	[6, 8]	[7, 7.5]	[8, 9]	[0.8, 0.9]
x_5	[2, 2.5]	[4, 5]	[8, 9]	[5, 6]	[5, 7]	[8, 9]	[5, 6]	[0.6, 0.7]

جدول ٤-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.46, 0.71]	[0.26, 0.32]	[0.18, 0.22]	[0.21, 0.31]
x_2	[0.28, 0.39]	[0.41, 0.58]	[0.20, 0.23]	[0.51, 0.76]
x_3	[0.44, 0.59]	[0.27, 0.34]	[0.15, 0.20]	[0.28, 0.38]
x_4	[0.31, 0.42]	[0.41, 0.58]	[0.20, 0.24]	[0.36, 0.51]
x_5	[0.35, 0.53]	[0.49, 0.73]	[0.18, 0.22]	[0.42, 0.61]

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.20, 0.27]	[0.19, 0.23]	[0.06, 0.10]	[0.22, 0.24]
x_2	[0.52, 0.82]	[0.16, 0.21]	[0.26, 0.34]	[0.20, 0.22]
x_3	[0.26, 0.37]	[0.20, 0.23]	[0.15, 0.22]	[0.19, 0.24]
x_4	[0.32, 0.55]	[0.16, 0.19]	[0.24, 0.31]	[0.15, 0.17]
x_5	[0.37, 0.66]	[0.19, 0.23]	[0.15, 0.21]	[0.11, 0.13]

جدول ۷-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال وزندار $\tilde{Y}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.046, 0.071]	[0.026, 0.032]	[0.018, 0.022]	[0.021, 0.031]
x_2	[0.028, 0.039]	[0.041, 0.058]	[0.020, 0.023]	[0.051, 0.076]
x_3	[0.044, 0.059]	[0.027, 0.034]	[0.015, 0.020]	[0.028, 0.038]
x_4	[0.031, 0.042]	[0.041, 0.058]	[0.020, 0.024]	[0.036, 0.051]
x_5	[0.035, 0.053]	[0.049, 0.073]	[0.018, 0.022]	[0.042, 0.061]

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.020, 0.027]	[0.019, 0.023]	[0.006, 0.010]	[0.022, 0.024]
x_2	[0.052, 0.082]	[0.016, 0.021]	[0.026, 0.034]	[0.020, 0.022]
x_3	[0.026, 0.037]	[0.020, 0.023]	[0.015, 0.022]	[0.019, 0.024]
x_4	[0.032, 0.055]	[0.016, 0.019]	[0.024, 0.031]	[0.015, 0.017]
x_5	[0.037, 0.066]	[0.019, 0.023]	[0.015, 0.021]	[0.011, 0.013]

گام ۲) با استفاده از بردار وزن شاخصه‌های w و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$، ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال وزندار $\tilde{Y}$ را بدست می‌آوریم. این ماتریس در جدول (۴-۷) نمایش داده شده است.

گام ۳) نقطه ایده‌آل مثبت فاصله‌ای $\tilde{y}^+$ و نقطه ایده‌آل منفی فاصله‌ای $\tilde{y}^-$ را به ترتیب از طریق معادلات (۴-۱۶) و (۴-۲۰) محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{y}^+ = ([0.046, 0.071],\ [0.059, 0.088],\ [0.030, 0.036],\ [0.066, 0.099],\ [0.088, 0.139],\ [0.022, 0.025],\ [0.031, 0.041],\ [0.022, 0.024])$$

$$\tilde{y}^- = ([0.021, 0.039],\ [0.031, 0.038],\ [0.023, 0.030],\ [0.027, 0.040],\ [0.034, 0.046],\ [0.018, 0.021],\ [0.007, 0.021],\ [0.011, 0.013])$$

گام ٤) فاصله گزینه‌ها تا مقادیر $\tilde{y}^+$ و $\tilde{y}^-$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_1^+ = 0.383,\ D_2^+ = 0.089,\ D_3^+ = 0.333,\ D_4^+ = 0.230,\ D_5^+ = 0.170$$

$$D_1^- = 0.093\,,\ D_2^- = 0.387\,,\ D_3^- = 0.143\,,\ D_4^- = 0.246\,,\ D_5^- = 0.306$$

گام ۵) درجه نزدیکی هر گزینه را با نقطه ایده‌آل مثبت فاصله بدست می‌آوریم:

$$c_1 = 0.195\,,\ c_2 = 0.813\,,\ c_3 = 0.300\,,\ c_4 = 0.517\,,\ c_5 = 0.643$$

گام ٦) گزینه‌ها را منطبق بر مقادیر درجه نزدیکی بدست آمده در گام پنجم رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$$

همانطور که مشاهده می‌شود، x_2 بهترین گزینه است.

٤-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگرهای *UBM*

میانگین بونفرونی (*BM*)[۱] که ابتدائا توسط بونفرونی[۲] در سال ۱۹۵۰ معرفی شده است، یک عملگر میانگین سنتی برای تجمیع و تلفیق داده‌ها است که بویژه برای تجمیع داده‌های قطعی مناسب است و با استفاده از آن می‌توان روابط درونی میان این داده‌ها را تشریح کرد. اخیراً یاگر[۳] عملگر *BM* را با استفاده از جایگزین کردن میانگین‌گیری معمولی با عملگرهای میانگین‌گیری جدید مانند *OWA* (یاگر، (۱۹۸۸)[۴]) و انتگرال چوکت[۵] (چوکت، (۱۹۵۳)[۶]) بسط داد. با در نظر گرفتن ویژگیهای جذاب *BM* و نیاز اساسی به توسعه کاربردهای آن در زمینه‌هایی نظیر: تصمیم‌گیری در شرایط عدم‌قطعیت، خوشه‌بندی فازی، برنامه‌ریزی غیرقطعی و مواردی از این دست، ژوو[۷] عملگر *BM* را به منظور تجمیع و تلفیق داده‌های

[1] Bonferroni Mean (BM)
[2] Bonferroni (1950)
[3] Yager (2009)
[4] Yager (1988)
[5] Choquet (1953)
[6] Choquet Integral
[7] Xu (2010)

غیرقطعی و ایجاد چند نمونه از عملگرهای BM غیرقطعی[۱] (UBM) توسعه داد. همچنین، او عملگر میانگین بونفرونی غیرقطعی وزندار مرتب شده[۲]، عملگر بونفرونی –چوکت غیرقطعی[۳] و امثال آن را پیشنهاد داد. او ضمن مطالعه خواص این عملگرها، آنها را برای حل مسائل $MADM$ غیرقطعی نیز بکار گرفت.

۱-٤-٤ عملگرهای UBM و کاربرد آنها در تصمیم‌گیری چندشاخصه

دسته‌ای از داده قطعی $a_i\,(i=1, 2, ..., n)$ را در نظر بگیرید که برای تمام iها، شرط $a_i \geq 0$ برقرار باشد. همچنین، $p, q \geq 0$ را نیز در نظر بگیرید. بونفرونی[۴] یک عملگر برای تجمیع داده‌ها معرفی کرد که با نماد $B^{p,q}$ نشان داده می‌شود، و بصورت زیر است:

$$B^{p,q}(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i^p a_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \qquad (۴-۲۴)$$

اخیراً عملگر $B^{p,q}$ توسط چند محقق از جمله یاگر[۵]، بیلاکوف و همکارانش[۶] و بلوم[۷] مورد بحث و بررسی قرار گرفت و بتدریج این عملگر را عملگر میانگین بونفرونی (BM) نامیدند. در شرایط خاصی که $p = q = 1$ باشد، BM به شکل زیر تقلیل می‌یابد (یاگر، (۲۰۰۹)):

$$B(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varsigma_i a_i \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۲۵)$$

---

[1] Uncertain Bonferroi Mean (UBM)
[2] Uncertain Ordered Weighted BM Operator
[3] Uncertain Bonferroni Choquet Operator
[4] Bonferroni (1950)
[5] Yager (2009)
[6] Beliakov et al. (2007)
[7] Bullen (2003)

که در رابطه فوق، $\varsigma_i = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_j$ است.

اگر به جای میانگین‌گیری معمولی، برای محاسبه ς_i از عملگر OWA استفاده شود، خواهیم داشت (یاگر، (۲۰۰۹)[1]):

$$BON-OWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i OWA_\omega(\beta^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۲۶)$$

در رابطه فوق β^i، عملا n-1 تایی $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ بوده و ω بردار وزن عملگر OWA با ابعاد n-1 است که در آن $\omega_j \geq 0$ بوده و $\sum_j \omega_j = 1$ است و نیز داریم:

$$OWA_\omega(\beta^i) = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j a_{\sigma_i(j)} \qquad (۴-۲۷)$$

در رابطه فوق، $a_{\sigma_i(j)}$ بیانگر j امین عنصر بزرگ در β^i است.

اگر هرکدام از عناصر a_i دارای وزن مخصوص به خود همچون w_i باشند، آنگاه معادله (۴-۲۶) می‌تواند به شکل زیر تعمیم یابد:

$$BON-OWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i OWA_\omega(\beta^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۲۸)$$

که $w_i \in [0, 1]$ بوده و همچنین $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ است.

[1] Yager (2009)

در یک مسئله $MADM$ فرض کنید $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ مجموعه شاخصه‌ها باشد. همچنین فرض کنید $U^i=\Omega-\{u_i\}$ مجموعه‌ای از همان شاخصه‌ها به غیر از u_i باشد. آنگاه سنجش یا پیمانه مجموعه یکنواخت[۱] m_i روی U^i به شکل $m_i : 2^{U^i} \rightarrow [0,1]$ بیان می‌شود که دارای ویژگیهای زیر است:

۱) $m_i(\phi)=0$

۲) $m_i(U^i)=1$

۳) $m_i(F_1) \geq m_i(F_2)$ است، اگر $F_1 \subseteq F_2$ باشد.

با استفاده از پیمانه m_i، یاگر[۲] عملگر بونفرونی–چوکت را به صورت زیر تعریف کرد:

$$BON-CHOQ(a_1, a_2, ..., a_n)=\left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i C_{m_i}(\beta^i)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۲۹)$$

که در رابطه فوق داریم:

$$C_{m_i}(\beta^i)=\sum_{j=1}^{n-1} v_{ij}\left(m_i(H_j^i)-m_i(H_{j-1}^i)\right) \quad (۴-۳۰)$$

در اینجا H_j^i، یک زیرمجموعه از U^i است که شامل j معیار با بیشترین رضایت بوده و $H_0^i=\phi$ است. همچنین، $v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{in-1}$ عناصر درون β^i هستند. این عناصر بگونه‌ای مرتب شده‌اند که اگر $j_1<j_2$ باشد آنگاه قاعده $v_{ij1} \geq v_{ij2}$ حاکم خواهد بود.

ژوو[۳] نتایج فوق را برای محیطهای غیرقطعی توسعه داد. این توسعه برای محیطهای غیرقطعی است که داده‌های ورودی آنها از جنس اعداد فاصله‌ای است.

[1] Monotonic Set Meaure mi
[2] Yager (2009)
[3] Xu (2010)

دو عدد فاصله‌ای $(i=1, 2)$ $\tilde{a}_i=[a_i^L, a_i^U]$ را در نظر بگیرید، برای مقایسه آنها ابتدا باید مقادیر امید[1] آنها را محاسبه کنیم:

$$E(\tilde{a}_i)=\eta a_i^L+(1-\eta)a_i^U, \quad i=1, 2, \quad \eta\in[0, 1] \qquad (۴-۳۱)$$

هرچه مقدار $E(\tilde{a}_i)$ بیشتر باشد، عدد فاصله‌ای $\tilde{a}_i$ بزرگتر است. در حالت خاصی که ممکن است امید این دو عدد فاصله‌ای $E(\tilde{a}_i)\,(i=1,2)$ مساوی بوده و مقایسه و رتبه‌بندی میسر نباشد، می‌توان از شاخص عدم قطعیت آنها استفاده کرد. این شاخص به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$l_{\tilde{a}_i}=a_i^U-a_i^L, \qquad i=1, 2 \qquad (۴-۳۲)$$

هرچه مقدار $l_{\tilde{a}_i}$ کمتر باشد، درجه عدم قطعیت $\tilde{a}_i$ کمتر است. در نتیجه کاملا منطقی است که استدلال کرد در چنین شرایطی، عدد فاصله‌ای $\tilde{a}_i$ بزرگتر است.

حال بر اساس این دو معادله (۴-۳۱) و (۴-۳۲)، می‌توان هر دو عدد فاصله‌ای را مقایسه نمود. در حالت خیلی خاص، اگر $E(\tilde{a}_1)=E(\tilde{a}_2)$ باشد و همچنین تساوی $l_{\tilde{a}_1}=l_{\tilde{a}_2}$ برقرار باشد، آنگاه بر اساس دو معادله مذکور، به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases}\eta a_1^L+(1-\eta)a_1^U=\eta a_2^L+(1-\eta)a_2^U \\ a_1^U-a_1^L=a_2^U-a_2^L\end{cases} \qquad (۴-۳۳)$$

که از معادله فوق نتیجه می‌شود تساوی $a_1^L=a_2^L$ و نیز $a_1^U=a_2^U$ برقرار است. به عبارتی $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2$ می‌باشد.

فرض کنید $(i=1, 2, ..., n)$ $\tilde{a}_i=[a_i^L, a_i^U]$ به عنوان مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای و نیز $p, q\geq 0$ باشد، آنگاه عملگر زیر را عملگر میانگین غیرقطعی بونفرونی (*UBM*) می‌نامیم:

[1] Expected Values

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tilde{a}_i^p \tilde{a}_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{۴-۳۴}$$

بر اساس عملیات فوق، عملگر UBM می‌تواند به شکل زیر نیز تبدیل شود:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) \tag{۴-۳۵}$$
$$= \left[\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(a_i^L\right)^p \left(a_j^L\right)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}, \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(a_i^U\right)^p \left(a_j^U\right)^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \right]$$

مثال ٤-٤ سه عدد فاصله‌ای $\tilde{a}_1 = [10, 15]$، $\tilde{a}_2 = [8, 10]$ و $\tilde{a}_3 = [20, 30]$ را در نظر بگیرید. اگر (بدون از دست دادن کلیت) فرض کنیم $p = q = 1$ باشد، آنگاه بر اساس معادله (۴-۳۵) داریم:

$$UB^{1,1}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \left[\left(\frac{1}{6} \left(10\times8+10\times20+8\times20+8\times10+20\times10+20\times8\right) \right)^{\frac{1}{2}}, \right.$$
$$\left. \left(\frac{1}{6} \left(15\times10+15\times30+10\times30+10\times15+30\times15+30\times10\right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$
$$= [12.1,\ \ 17.3]$$

در ادامه این فصل، به بحث در مورد حالات خاص عملگر UBM می‌پردازیم (ژوو، (۲۰۱۰)[1]):

۱) اگر $q = 0$ باشد، آنگاه معادله (۴-۳۵) به شکل زیر تقلیل می‌یابد:

$$UB^{p,0}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$$

---

[1] Xu (2010)

$$=\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^L\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^U\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (۴-۳۶)$$

که عملگر فوق را عملگر میانگین غیرقطعی تعمیم‌یافته[۱] می‌نامیم.

۲) اگر $p\to+\infty$ و $q=0$ باشد، آنگاه معادله (۴-۳۵) مجدداً به صورتی دیگر تقلیل می‌یابد:

$$\lim_{p\to+\infty} UB^{p,0}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$$

$$=\left[\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^L\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^U\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\left[\max_i\{a_i^L\},\ \max_i\{a_i^U\}\right] \qquad (۴-۳۷)$$

۳) اگر $p=1$ و $q=0$ باشد، آنگاه معادله (۴-۳۵) به صورتی دیگر نیز تقلیل می‌یابد:

$$UB^{1,0}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)=\left[\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}a_i^L,\ \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}a_i^U\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i \qquad (۴-۳۸)$$

که عملگر تقلیل یافته فوق را عملگر میانگین غیرقطعی[۲] می‌نامیم.

۴) اگر $p\to 0$ و $q=0$ باشد، آنگاه معادله (۴-۳۵) مجدداً تقلیل یافته و به شکل زیر خواهد بود:

$$\lim_{p\to 0} UB^{p,0}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$$

[1] Generalized Uncertain Averaging Operator
[2] Uncertain Averaging Operator

$$=\left[\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^L\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^U\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^L\right)^{\frac{1}{n}},\ \prod_{i=1}^{n}\left(a_i^U\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(a_i^L\right),\ \prod_{i=1}^{n}\left(a_i^U\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\left(\prod_{i=1}^{n}\tilde{a}_i\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (۴-۳۹)$$

که عملگر فوق، عملگر میانگین هندسی غیرقطعی[۱] نامیده می‌شود.

۵) اگر $p=q=1$ باشد، آنگاه معادله (۳۵-۴) به صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$UB^{1,1}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^L a_j^L\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^U a_j^U\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\tilde{a}_i\tilde{a}_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۴۰)$$

که عملگر فوق، عملگر میانگین مربعات غیرقطعی با روابط اندرونی (یا در هم تنیده)[۲] نامیده می‌شود.

عملگر UBM دارای ویژگیهای زیر است:

---

[1] Uncertain Geometric Mean Operator
[2] Interrelated Uncertain Square Mean Operator

قضیه ۳-٤ (ژوو، (۲۰۱۰)[1]) اگر $\tilde{a}_i = [a_i^L, a_i^U] \ (i = 1, 2, ..., n)$ را یک مجموعه از اعداد فاصله‌ای در نظر بگیریم و همچنین $p, q \geq 0$ باشد، آنگاه:

۱) (**هماهنگی**[2]) اگر به ازای هر i داشته باشیم $\tilde{a}_i = \tilde{a}$. آنگاه $UB^{p,q}(\tilde{a}, \tilde{a}, ..., \tilde{a}) = \tilde{a}$ است،

۲) (**یکنواختی**[3]) فرض کنید $\tilde{d}_i = [d_i^L, d_i^U] \ (i = 1, 2, ..., n)$ یک مجموعه از اعداد فاصله‌ای باشد. اگر به ازای هر i داشته باشیم $a_i^L \geq d_i^L$ و $a_i^U \geq d_i^U$، آنگاه:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) \geq B^{p,q}(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, ..., \tilde{d}_n)$$

۳) (**جابجایی**[4]) برای هر جایگشت $(\dot{\tilde{a}}_1, \dot{\tilde{a}}_2, ..., \dot{\tilde{a}}_n)$ از $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$، داریم:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = UB^{p,q}(\dot{\tilde{a}}_1, \dot{\tilde{a}}_2, ..., \dot{\tilde{a}}_n)$$

۴) (**کرانداری**[5])

$$\left[\min_i\{a_i^L\}, \min_i\{a_i^U\}\right] \leq UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) \leq \left[\max_i\{a_i^L\}, \max_i\{a_i^U\}\right]$$

اثبات

۱) اگر $\tilde{a} = [a^L, a^U]$ باشد، آنگاه با استفاده از معادله (۴-۳۵) داریم:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}, \tilde{a}, ..., \tilde{a})$$
$$= \left[\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(a^L\right)^p \left(a^L\right)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}, \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(a^U\right)^p \left(a^U\right)^q \right)^{\frac{1}{p+q}} \right]$$

---

[1] Xu (2010)
[2] Idempotency
[3] Monotonicity
[4] Commutativity
[5] Boundedness

$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a^L\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a^U\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

$$=\left[\left(\left(a^L\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\left(a^U\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]=[a^L,a^U]=\tilde{a} \tag{۴-۴۱}$$

۲) از آنجاکه به ازای هر i داریم $a_i^L \geq d_i^L$ و $a_i^U \geq d_i^U$، آنگاه:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,...,\tilde{a}_n)$$
$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^L\right)^{p}\left(a_j^L\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^U\right)^{p}\left(a_j^U\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$
$$\geq\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(d_i^L\right)^{p}\left(d_j^L\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(d_i^U\right)^{p}\left(d_j^U\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$
$$=UB^{p,q}(\tilde{d}_1,\tilde{d}_2,...,\tilde{d}_n) \tag{۴-۴۲}$$

۳) اگر به ازای هر $i=1,2,...,n$ داشته باشیم $\dot{\tilde{a}}_i=[\dot{a}_i^L,\dot{a}_i^U]$، آنگاه:

$$UB^{p,q}(\dot{\tilde{a}}_1,\dot{\tilde{a}}_2,...,\dot{\tilde{a}}_n) \tag{۴-۴۳}$$
$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\dot{a}_i^L\right)^{p}\left(\dot{a}_j^L\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\dot{a}_i^U\right)^{p}\left(\dot{a}_j^U\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

از آنجاکه $(\dot{\tilde{a}}_1,\dot{\tilde{a}}_2,...,\dot{\tilde{a}}_n)$ جایگشتی از $(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,...,\tilde{a}_n)$ است، آنگاه از معادلات (۴-۳۵) و (۴-۴۳) می‌دانیم:

$$\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\dot{a}_i^L\right)^p\left(\dot{a}_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\dot{a}_i^U\right)^p\left(\dot{a}_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^L\right)^p\left(a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^U\right)^p\left(a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right] \quad (۴-۴۴)$$

و این یعنی $UB^{p,q}(\dot{\tilde{a}}_1, \dot{\tilde{a}}_2, ..., \dot{\tilde{a}}_n)=UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$.

۴) داریم:

$$UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$$

$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^L\right)^p\left(a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(a_i^U\right)^p\left(a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\max_i\{a_i^L\}\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\max_i\{a_i^U\}\right)^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

$$\leq\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\max_i\{a_i^L\}\right)^{p}\left(\max_i\{a_i^L\}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}},\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\max_i\{a_i^U\}\right)^{p}\left(\max_i\{a_i^U\}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]$$

$$=\left[\max_i\{a_i^L\},\ \max_i\{a_i^U\}\right] \tag{۴-۴۵}$$

و به طور مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که $UB^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) \geq \left[\min_i\{a_i^L\}, \min_i\{a_i^U\}\right]$.

از آنجا که داده‌های ورودی معمولاً دارای منابع مختلفی هستند و هریک نیز اهمیت خاص خود را داراست، بنابراین باید برای هر داده یک وزن در نظر گرفته شود. در این قسمت شکل وزنی عملگر UBM را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فرض کنید $\tilde{a}_i=[a_i^L, a_i^U]\ (i=1, 2, ..., n)$ مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای باشند که هریک از آنها دارای وزن w_i هستند. همچنین، در مورد این اوزان شرایط $w_i \geq 0$ به ازای هر i و $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ برقرار است. در این صورت عملگر زیر را عملگر میانگین بونفرونی غیرقطعی وزنی[1] ($WUBM$) می‌نامیم:

$$UB_w^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)=\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(w_i\tilde{a}_i)^p(w_j\tilde{a}_j)^q\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{۴-۴۶}$$

که در آن:

$$\Delta=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(w_i)^p(w_j)^q \tag{۴-۴۷}$$

بر اساس عملیات قابل انجام بر روی اعداد فاصله‌ای، عملگر $WUBM$، به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$UB_w^{p,q}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$

[1] Weighted Uncertain Bonferroni Mean (WUBM) Operator

$$=\left[\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(w_i a_i^L\right)^p\left(w_j a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(w_i a_i^U\right)^p\left(w_j a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right] \tag{۴-۴۸}$$

در صورتی که اوزان به صورت $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ باشند، خواهیم داشت:

$$\Delta=\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}(w_i)^p(w_j)^q=n(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^{p+q} \tag{۴-۴۹}$$

بر اساس آن معادله (۴-۴۸) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&UB_w^{p,q}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)\\
&=\left[\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{n}a_i^L\right)^p\left(\frac{1}{n}a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{\Delta}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{n}a_i^U\right)^p\left(\frac{1}{n}a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]\\
&=\left[\left(\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{n}\right)^{p+q}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(a_i^L\right)^p\left(a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{n}\right)^{p+q}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(a_i^U\right)^p\left(a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]\\
&=\left[\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(a_i^L\right)^p\left(a_j^L\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}},\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(a_i^U\right)^p\left(a_j^U\right)^q\right)^{\frac{1}{p+q}}\right]\\
&=UB^{p,q}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\ldots,\tilde{a}_n)
\end{aligned} \tag{۴-۵۰}$$

که منجر به تقلیل آن به عملگر *UBM* می‌شود.

ژوو[1] با استفاده از عملگر $WUBM$، روشی ساده‌ای برای حل مسائل $MADM$ در شرایط عدم قطعیت ارائه نمود، که در ادامه به تشریح آن خواهیم پرداخت:

گام ۱) دو مجموعه X و U را در نظر بگیرید که به ترتیب بیانگر گزینه‌ها و شاخصه‌ها باشند. هر شاخصه دارای وزن w_i بوده که $w_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$است. عملکرد گزینه $x_i \in X$ تحت شاخصه $u_j \in U$ به صورت عدد فاصله‌ای $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ بیان می‌شود که در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ فهرست شده است. به طور کلی دو نوع شاخصه داریم: شاخصه‌هایی از جنس سود و شاخصه‌هایی از جنس هزینه. ماتریس $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ را با استفاده از روابط (۴-۹) و (۴-۱۰) نرمال ساخته و ماتریس نرمال $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را بدست آورید که در آن به ازای هر i و j داریم $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^U]$.

گام۲) عملگر $WUBM$ در معادله (۴-۴۶) را به منظور تجمیع مقادیر عملکردی $\tilde{r}_{ij}\,(j=1, 2, ..., m)$ در jامین سطر از $\tilde{R}$ و نیز بدست آوردن مقادیر عملکردی کل $\tilde{z}_i(w)$ متناظر با هر گزینه x_i بکار گیرید. (در حالت کلی، به منظور تطابق بیشتر با حس شهودی و نیز سادگی مسئله، فرض کنید $p = q = 1$). در اینصورت خواهیم داشت:

$$\tilde{z}_i(w) = [z_i^L(w), z_i^U(w)] = UB_w^{p,q}(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, ..., \tilde{r}_{im}) \qquad (۴-۵۱)$$

گام۳) از معادلات (۴-۳۱) و (۴-۳۲) و با تبعیت از این قانون که هرچه مقدار $\tilde{z}_i(w)$ بیشتر باشد، آنگاه گزینه x_i بهتر خواهد بود، برای رتبه‌بندی مقادیر عملکردی کل $\tilde{z}_i(w)$ استفاده وگزینه‌های x_i را رتبه‌بندی نمائید.

ویژگی بارز روش فوق این است که در آن از عملگر $WUBM$ به منظور ترکیب و آمیختگی مقادیر عملکردی گزینه‌ها استفاده می‌شود، که می‌تواند روابط درونی هر معیار را در نظر گیرد.

[1] Xu (2010)

اکنون، به ارائه یک مثال عددی می‌پردازیم تا کاربرد روش فوق برای خواننده ملموس‌تر گردد:

مثال ۵-٤ (ژوو، (۲۰۱۰)[1]) رباتها به وفور توسط شرکتهای تولیدی پیشرفته برای انجام عملیات دشوار مورد استفاده قرار می‌گیرند (ژوو، (۲۰۰۷)[2] ؛ گوو و همکاران، (۱۹۹۶)[3]). انتخاب یک ربات مناسب برای مدیران این شرکتها امری حائز اهمیت است چراکه انتخاب نادرست رباتها ممکن است اثر سوئی بر روی سوددهی شرکت آنها داشته باشد. یک شرکت تولیدی قصد انتخاب یک ربات از میان پنج ربات $x_i\,(i=1,2,3,4,5)$ را دارد. در انتخاب این ربات چهار شاخصه $u_j\,(j=1,2,3,4)$ که دارای بردار وزنی $w=(0.2,0.3,0.4,0.1)$ هستند در نظر گرفته می‌شوند. این شاخصه‌ها به این صورت هستند: (۱) u_1: حداکثر سرعت بازوی ربات، (۲) u_2: حداکثر ظرفیت بار قابل تحمل توسط ربات، (۳) u_3: هزینه‌های خرید، نصب و آموزش (بر حسب هزار دلار) و (۴) u_4: تکرارپذیری، که قدرت بازگشت مکرر ربات به یک نقطه ثابت است. معمولاً میانگین انحراف ربات از آن نقطهٔ ثابت، بعنوان معیار تکرارپذیری ربات شناخته می‌شود.

در میان این شاخصه‌ها، شاخصه اول و دوم از جنس سود و شاخصه سوم و چهارم از جنس هزینه هستند. اطلاعات تصمیم در مورد رباتها در جدول (۴-۸) فهرست شده است و ماتریس تصمیم نرمال که برای نرمال‌سازی آن از معادلات (۴-۱۳) و (۴-۱۴) استفاده شده نیز در جدول (۴-۹) فهرست شده است (ژوو، (۲۰۰۷)).

برای حل این مسئله از عملگر *WUBM* بیان شده در معادله (۴-۴۸) (با فرض $p=q=1$) به منظور تجمیع $\tilde{r}_{ij}\,(i=1,2,3,4)$ ها و حصول مقادیر عملکردی کل[4] $\tilde{z}_i(w)$ برای رباتهای x_i استفاده می‌کنیم.

---

1 Xu (2010)
2 Xu (2007)
3 Goh et al. (1996)
4 Overall Performance Values

جدول ۸-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[1.8, 2.0]	[90, 95]	[9.0, 9.5]	[0.45, 0.50]
x_2	[1.4, 1.6]	[80, 85]	[5.5, 6.0]	[0.30, 0.40]
x_3	[0.8, 1.0]	[65, 70]	[4.0, 4.5]	[0.20, 0.25]
x_4	[1.0, 1.2]	[85, 90]	[9.5, 10]	[0.25, 0.30]
x_5	[0.9, 1.1]	[70, 80]	[9.0, 10]	[0.35, 0.40]

جدول ۹-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.26, 0.34]	[0.21, 0.24]	[0.14, 0.16]	[0.11, 0.16]
x_2	[0.20, 0.27]	[0.19, 0.22]	[0.22, 0.26]	[0.14, 0.23]
x_3	[0.12, 0.17]	[0.15, 0.18]	[0.29, 0.36]	[0.23, 0.35]
x_4	[0.14, 0.20]	[0.20, 0.23]	[0.13, 0.15]	[0.19, 0.28]
x_5	[0.13, 0.19]	[0.17, 0.21]	[0.13, 0.16]	[0.14, 0.20]

از آنجاکه:

$$\Delta = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4} \left(w_i w_j \right) = (0.2\times 0.3 + 0.2\times 0.4 + 0.2\times 0.1 + 0.3\times 0.4$$
$$+0.3\times 0.1 + 0.4\times 0.1)\times 2 = 0.70$$

آنگاه:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(w) &= UB_w^{1,1}(\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{21}, \tilde{r}_{31}, \tilde{r}_{41})\\ &= \Bigg[\Bigg(\frac{1}{0.7} \big((0.2\times 0.26)\times(0.3\times 0.21) + (0.2\times 0.26)\times(0.4\times 0.14)\\ &\qquad +(0.2\times 0.26)\times(0.1\times 0.11) + (0.3\times 0.21)\times(0.4\times 0.14)\\ &\qquad +(0.3\times 0.21)\times(0.1\times 0.11) + (0.4\times 0.14)\times(0.1\times 0.11)\big)\times 2\Bigg)^{\frac{1}{2}} ,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{0.7}\Big((0.2\times0.34)\times(0.3\times0.24)+(0.2\times0.34)\times(0.4\times0.16)$$
$$+(0.2\times0.34)\times(0.1\times0.16)+(0.3\times0.24)\times(0.4\times0.16)$$
$$+(0.3\times0.24)\times(0.1\times0.16)+(0.4\times0.16)\times(0.1\times0.16)\Big)\times2\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

$$=[0.182,\ 0.221]$$

و به طور مشابه:

$$\tilde{z}_2(w)=[0.196,\ 0.246]\ ,\ \ \tilde{z}_3(w)=[0.195,\ 0.254]$$
$$\tilde{z}_4(w)=[0.160,\ 0.200]\ ,\ \ \tilde{z}_5(w)=[0.143,\ 0.186]$$

با استفاده از معادله (۴-۳۱)، امید ریاضی مربوط به هر یک از $\tilde{z}_i(w)$ ها را محاسبه می‌کنیم:

$$E(\tilde{z}_1(w))=0.221-0.039\eta\ ,\ E(\tilde{z}_2(w))=0.246-0.050\eta\ \ E(\tilde{z}_3(w))=0.254-0.059\eta$$
$$,\ E(\tilde{z}_4(w))=0.200-0.040\eta\ \ E(\tilde{z}_5(w))=0.186-0.043\eta$$

با تحلیل پارامتر η داریم:

۱) اگر $0\le\eta<\frac{8}{9}$ باشد، آنگاه:

$$E(\tilde{z}_3(w))>E(\tilde{z}_2(w))>E(\tilde{z}_1(w))>E(\tilde{z}_4(w))>E(\tilde{z}_5(w))$$

بنابراین، $\tilde{z}_3(w)>\tilde{z}_2(w)>\tilde{z}_1(w)>\tilde{z}_4(w)>\tilde{z}_5(w)$ می‌باشد و رتبه‌بندی گزینه‌ها نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3\succ x_2\succ x_1\succ x_4\succ x_5$$

۲) اگر $\frac{8}{9}<\eta\le1$ باشد، آنگاه:

$$E(\tilde{z}_2(w))>E(\tilde{z}_3(w))>E(\tilde{z}_1(w))>E(\tilde{z}_4(w))>E(\tilde{z}_5(w))$$

بنابراین، $\tilde{z}_2(w)>\tilde{z}_3(w)>\tilde{z}_1(w)>\tilde{z}_4(w)>\tilde{z}_5(w)$ است و متناظراً رتبه‌بندی گزینه‌ها نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5$$

۳) اگر $\eta = \dfrac{8}{9}$ باشد، آنگاه:

$$E(\tilde{z}_2(w)) = E(\tilde{z}_3(w)) > E(\tilde{z}_1(w)) > E(\tilde{z}_4(w)) > E(\tilde{z}_5(w))$$

در این مورد، از معادله (۴-۳۲) به منظور محاسبه شاخص عدم قطعیت $\tilde{r}_2$ و $\tilde{r}_3$ استفاده می‌کنیم:

$$l_{\tilde{r}_2} = 0.246 - 0.196 = 0.050, \;\; l_{\tilde{r}_3} = 0.254 - 0.195 = 0.059$$

از آنجاکه $l_{\tilde{r}_2} < l_{\tilde{r}_3}$ است، پس نتیجه می‌گیریم که $\tilde{r}_2 > \tilde{r}_3$ است. در این حالت، مقادیر عملکردی کل به صورت $\tilde{z}_2(w) > \tilde{z}_3(w) > \tilde{z}_1(w) > \tilde{z}_4(w) > \tilde{z}_5(w)$ می‌باشد و در نتیجه رتبه‌بندی گزینه‌ها نیز به شکل ذیل است:

$$x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_5$$

بر اساس تحلیلهای انجام شده در این مسئله، این امر که رتبه‌بندی رباتها بر اساس تغییرات پارامتر η متفاوت است بدیهی به نظر می‌رسد. در صورتی که $\dfrac{8}{9} \le \eta \le 1$ باشد، ربات دوم بهترین انتخاب است و ربات سوم دومین انتخاب می‌باشد. ولی اگر $0 \le \eta < \dfrac{8}{9}$ باشد، رتبه‌بندی رباتهای دوم و سوم متفاوت خواهد بود، یعنی ربات سوم به عنوان بهترین انتخاب در نظر گرفته می‌شود و ربات دوم دومین انتخاب خواهد بود. به هر حال مشخص است که رتبه‌بندی سایر رباتها (رباتهای اول، چهارم و پنجم) به ازای هر مقدار پارامتر η بدون تغییر خواهند ماند. یعنی $x_1 \succ x_4 \succ x_5$ برای هر مقدار $\eta \in [0, 1]$.

۲-٤-٤ ترکیب عملگر *UBM* با *OWA* و انتگرال چوکت و بررسی کاربرد آنها در *MADM*

ژوو[1] نتایج یاگر[2] را برای موقعیتهای غیرقطعی و با در نظر گرفتن حالتی که در عملگر *UBM* پارامترهای $p=q=1$ باشد، توسعه داد.

فرض کنید $(i=1, 2, ..., n)$ $\tilde{a}_i=[a_i^L, a_i^U]$ مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای باشد، آنگاه بر اساس معادله (۳۴-۴) خواهیم داشت:

$$UB^{1,1}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)=\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tilde{a}_i\tilde{a}_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i\left(\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\tilde{a}_j\right)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۲-۴)$$

برای راحتی، $UB^{1,1}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$ را به شکل $UB(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، فرض کنید برای فشرده‌سازی، $\tilde{\varsigma}_i$ را بصورت $\tilde{\varsigma}_i=\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\tilde{a}_j$ تعریف کنیم که $\tilde{\varsigma}_i$ عملاً در این رابطه، نشاندهنده میانگین غیرقطعی همه اعداد فاصله‌ای است $(j\neq i)$ $\tilde{a}_j$ است. در این صورت می‌توان معادله (۵۲-۴) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$UB(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{a}_i\tilde{\varsigma}_i\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۳-۴)$$

---

[1] Xu (2010)
[2] Yager (2009)

فرض کنید $\tilde{\beta}^i$ مجموعه *n-1* تایی به صورت $(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_{i+1}, ..., \tilde{a}_n)$ باشد. حال عملگر میانگین وزنی مرتب غیرقطعی ($UOWA$)[1] که در اینجا یک عملگر *n-1* بُعدی است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$UOWA_{\omega}(\tilde{\beta}^i) = \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j \tilde{a}_{\sigma_i(j)} = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \omega_j \tilde{a}^L_{\sigma_i(j)},\ \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j \tilde{a}^U_{\sigma_i(j)} \right] \qquad (۴-۵۴)$$

در رابطه فوق، $\tilde{a}_{\sigma_i(j)} = [a^L_{\sigma_i(j)},\ a^U_{\sigma_i(j)}]$، عملا *j*امین عدد فاصله‌ای بزرگ در $\tilde{\beta}^i$ است و $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1})$ بیانگر بردار وزن مرتبط با عملگر $UOWA$ می‌باشد، که در آن $\omega_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n-1} \omega_j = 1$ می‌باشد.

در صورتی که در محاسبه فوق بجای میانگین غیرقطعی $\tilde{\varsigma}_i$ در معادله (۴-۵۳) از تجمیع $UOWA$ برای تمام $\tilde{a}_j\ (j \neq i)$ استفاده کنیم، آنگاه بر اساس معادله (۴-۵۴) خواهیم داشت:

$$UB-OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i\ UOWA_{\omega}(\tilde{\beta}^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۵۵)$$

عملگر فوق، عملگر *UBM-OWA* نامیده می‌شود. در حالت خاصی که بردار وزن به صورت $\omega = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{n-1} \right)$ باشد، معادله (۴-۵۵) به عملگر UBM تبدیل می‌شود.

اگر وزن داده‌ها نیز در نظر گرفته شوند؛ یعنی $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزنی متناظر با $\tilde{a}_i$ باشد، که در آن $w_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ باشد، آنگاه معادله (۴-۵۵) به صورت زیر تعمیم می‌یابد:

$$UB-OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{a}_i\ UOWA_{\omega}(\tilde{\beta}^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۵۶)$$

[1] Uncertain Ordered Weighted Averaging (UOWA) Operator

در حالت خاص، اگر بردار وزن داده‌ها به صورت $w=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ باشد، آنگاه معادله (۴-۵۶) به (۴-۵۵) تبدیل می‌یابد.

مثال ٤-٦ (ژوو، (۲۰۱۰)[1]) فرض کنید مقادیر $\tilde{a}_1=[3, 5]$، $\tilde{a}_2=[1, 2]$ و $\tilde{a}_3=[7, 9]$ سه عدد فاصله‌ای باشند و $w=(0.3, 0.4, 0.3)$ نیز بردار وزن متناظر با اعداد فاصله‌ای مذکور باشد و همچنین $\omega=(0.6, 0.4)$ بردار وزنی عملگر *UOWA* بوده که دارای دو بُعد است.

حال از آنجائیکه $\tilde{a}_3 > \tilde{a}_1 > \tilde{a}_3$ است، پس ابتدا مقادیر $UOWA_\omega(\tilde{\beta}^i)\ (i=1, 2, 3)$ را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} UOWA_\omega(\tilde{\beta}^1) &= UOWA_\omega(\tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \omega_1\tilde{a}_3+\omega_2\tilde{a}_2 \\ &= 0.6\times[7, 9]+0.4\times[1, 2]=[4.6, 6.2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UOWA_\omega(\tilde{\beta}^2) &= UOWA_\omega(\tilde{a}_1, \tilde{a}_3) = \omega_1\tilde{a}_3+\omega_1\tilde{a}_1 \\ &= 0.6\times[7, 9]+0.4\times[3, 5]=[5.4, 7.4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UOWA_\omega(\tilde{\beta}^3) &= UOWA_\omega(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \omega_1\tilde{a}_1+\omega_2\tilde{a}_2 \\ &= 0.6\times[3, 5]+0.4\times[1, 2]=[2.2, 3.8] \end{aligned}$$

سپس، با استفاده از معادله (۴-۵۶) خواهیم داشت:

$$UB-OWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)=\left(\sum_{i=1}^{3} w_i\tilde{a}_i\ UOWA_\omega(\tilde{\beta}^i)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(w_1\tilde{a}_1\ UOWA_\omega(\tilde{\beta}^1)+w_2\tilde{a}_2\ UOWA_\omega(\tilde{\beta}^2)+w_3\tilde{a}_3\ UOWA_\omega(\tilde{\beta}^3)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(0.3\times[3, 5]\times[4.6, 6.2]+0.4\times[1, 2]\times[5.4, 7.4]+0.3\times[7, 9]\times[2.2, 3.8]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left([4.14, 9.30]+[2.16, 5.92]+[5.67, 8.36]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left([4.14, 9.30]+[2.16, 5.92]+[5.67, 8.36]\right)^{\frac{1}{2}}$$

[1] Xu (2010)

$$=[11.97,\ 23.58]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[3.46,\ 4.86]$$

در ادامه به بررسی ترکیب عملگر UBM با انتگرال شناخته شده چوکت می‌پردازیم (ژوو، (۲۰۱۰)[1]):

فرض کنید U مجموعه‌ای از شاخصه‌ها باشد و U^i نیز سنجش یا پیمانه مجموعه یکنواخت m_i روی U^i تعریف شود. به علاوه فرض کنید $\tilde{a}_{\sigma_i(1)}, \tilde{a}_{\sigma_i(2)}, ..., \tilde{a}_{\sigma_i(n-1)}$ اعداد فاصله‌ای مرتب در $\tilde{\beta}^i$ باشند، به قسمی که $\tilde{a}_{\sigma_i(k-1)} \geq \tilde{a}_{\sigma_i(k)}$ به ازای $k=2, 3, ..., n-1$ باشد. همچنین، فرض کنید $\{\tilde{a}_{\sigma_i(k)} \mid k \leq j\}$ $= \tilde{B}_{\sigma_i(j)}$ باشد، که در آن $j \geq 1$ و $\tilde{B}_{\sigma_i(0)} = \phi$ باشد. آنگاه، انتگرال چوکت $\tilde{\beta}^i$ با مد نظر قرار دادن m_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{m_i}(\tilde{\beta}^i) = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{\sigma_i(j)} \left(m_i(\tilde{B}_{\sigma_i(j)}) - m_i(\tilde{B}_{\sigma_i(j-1)}) \right) \qquad (۴-۵۷)$$

که بر اساس رابطه فوق، عملگر بونفرونی چوکت غیرقطعی ($UBM\text{-}CHOQ$) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (ژوو، (۲۰۱۰)).

$$UB-CHOQ(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i \ C_{m_i}(\tilde{\beta}^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۵۸)$$

اگر وزن w_i را برای هر $\tilde{a}_i$ مد نظر قرار دهیم، آنگاه با استفاده از معادله (۴-۵۸) معادله زیر را خواهیم داشت:

$$UB-CHOQ(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{a}_i \ C_{m_i}(\tilde{\beta}^i) \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۵۹)$$

در حال خاصی که بردار وزن $\tilde{a}_i$ها به صورت $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n} \right)$ باشد، معادله (۴-۵۹) به معادله (۴-۵۸) تقلیل خواهد یافت. جهت درک بهتر عملگر $UB\text{-}CHOQ$، مثال زیر را ارائه می‌دهیم:

---

[1] Xu (2010)

مثال ۷-٤ (ژوو، (۲۰۱۰)[1]) فرض کنید سه شاخصه $u_j(j=1, 2, 3)$ با بردار وزن $w=(0.5, 0.3, 0.2)$ وجود دارند. عملکرد گزینه x به ازای هر شاخصه $u_j(j=1, 2, 3)$ نیز به صورت اعداد فاصله‌ای $\tilde{a}_1=[3, 4]$، $\tilde{a}_2=[5, 7]$ و $\tilde{a}_3=[4, 6]$ باشند. همچنین، اگر داشته باشیم:

$$m_1(\phi)=m_2(\phi)=m_3(\phi)=0\,,\ m_1(\{\tilde{a}_2\})=m_3(\{\tilde{a}_2\})=0.3\ \ m_1(\{\tilde{a}_3\})=m_2(\{\tilde{a}_3\})=0.5\,,$$
$$m_2(\{\tilde{a}_1\})=m_3(\{\tilde{a}_1\})=0.6\ \ m_1(\{\tilde{a}_2, \tilde{a}_3\})=m_2(\{\tilde{a}_3, \tilde{a}_1\})=m_3(\{\tilde{a}_2, \tilde{a}_1\})=1$$

آنگاه با استفاده از معادله (۴-۵۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
C_{m_1}(\tilde{\beta}^1) &= \sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{\sigma_1(j)} \left(m_1(\tilde{B}_{\sigma_1(j)}) - m_1(\tilde{B}_{\sigma_1(j-1)}) \right) \\
&= \tilde{a}_2 \times \left(m_1(\{\tilde{a}_2\}) - m_1(\phi) \right) + \tilde{a}_3 \times \left(m_1(\{\tilde{a}_2, \tilde{a}_3\}) - m_1(\{\tilde{a}_2\}) \right) \\
&= [5, 7]\times(0.3-0)+[4, 6]\times(1-0.3) \\
&= [4.3, 6.3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{m_2}(\tilde{\beta}^2) &= \sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{\sigma_2(j)} \left(m_2(\tilde{B}_{\sigma_2(j)}) - m_2(\tilde{B}_{\sigma_2(j-1)}) \right) \\
&= \tilde{a}_3 \times \left(m_2(\{\tilde{a}_3\}) - m_2(\phi) \right) + \tilde{a}_1 \times \left(m_2(\{\tilde{a}_3, \tilde{a}_1\}) - m_2(\{\tilde{a}_3\}) \right) \\
&= [4, 6]\times(0.5-0)+[3, 4]\times(1-0.5) \\
&= [3.5, 5.0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{m_3}(\tilde{\beta}^3) &= \sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{\sigma_3(j)} \left(m_3(\tilde{B}_{\sigma_3(j)}) - m_3(\tilde{B}_{\sigma_3(j-1)}) \right) \\
&= \tilde{a}_2 \times \left(m_3(\{\tilde{a}_2\}) - m_3(\phi) \right) + \tilde{a}_1 \times \left(m_3(\{\tilde{a}_2, \tilde{a}_1\}) - m_1(\{\tilde{a}_2\}) \right) \\
&= [5, 7]\times(0.3-0)+[3, 4]\times(1-0.3) \\
&= [3.6, 4.9]
\end{aligned}$$

سپس بر اساس معادله (۴-۵۹) داریم:

$$UB-CHOQ(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \left(\sum_{i=1}^{3} w_i \tilde{a}_i\ C_{m_i}(\tilde{\beta}^i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

[1] Xu (2010)

$$=\left(0.5\times[3,\ 4]\times[4.3,\ 6.3]+0.3\times[5,\ 7]\times[3.5,\ 5.0]+0.2\times[4,\ 6]\times[3.6,\ 4.9]\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left([6.45,\ 12.60]+[5.25,\ 10.50]+[2.88,\ 5.88]\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[14.58,\ 28.98]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[3.82,\ 5.38]$$

٤-٥ کمینه‌سازی عدم انسجام گروهی[1] در مدلهای بهینه‌سازی بمنظور استخراج اوزان خبرگان

٤-٥-١ روش تصمیم‌گیری

یک مسئله غیرقطعی $MAGDM$ را در نظر بگیرید که در آن X، U، w، D و λ مانند قبل تعریف می‌شوند. خبرگان $d_k\,(k=1,\ 2,\ ...,\ t)$ ترجیحات خود روی گزینه‌های $x_i\,(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های u_j بیان کرده و در ماتریس تصمیم $\tilde{A}_k=(\tilde{a}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$، فهرست می‌کنند که در این ماتریس، مقادیر $\tilde{a}_{ij}^{(k)}$ها در قالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{a}_{ij}^{(k)}=[a_{ij}^{L(k)},\ a_{ij}^{U(k)}]$ می‌باشد. به منظور سنجش همه ویژگیها در واحدهای بی‌مقیاس، مقادیر هر ویژگی را با استفاده از معادلات (۴-۱۳) و (۴-۱۴) نرمال ساخته و نهایتاً ماتریس نرمال $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ حاصل می‌شود که در آن $\tilde{r}_{ij}^{(k)}=[r_{ij}^{L(k)},\ r_{ij}^{U(k)}]$ می‌باشد.

بر اساس قوانین مربوط به اعداد فاصله‌ای (ژوو و ژای، (۱۹۹۲)[2])، ما از عملگر UWA، یعنی معادله (۴-۱۵)، به منظور تلفیق تمامی ماتریسهای تصمیم غیرقطعی انفرادی نرمال[3] $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ استفاده کرده

---

[1] Group Discordance
[2] Xu and Zhai (1992)
[3] Normalized Individual Uncertain Decision Matrices

و از این طریق، آنها را به ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی[1] $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ تبدیل می‌کنیم. اگر نظر هر خبره مطابق با نظر گروه باشد، یعنی به ازای $k=1, 2, ..., t$ داشته باشیم $\tilde{R}_k=\tilde{R}$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{r}_{ij}^{(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\tilde{r}_{ij}^{(k)}\ ,\ i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m,\ \ k=1, 2, ..., t \tag{۴-۶۰}$$

به عبارت دیگر:

$$r_{ij}^{L(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\ \ r_{ij}^{U(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}$$
$$\text{for all}\quad i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m,\ k=1, 2, ..., t \tag{۴-۶۱}$$

در عین حال، باید این حقیقت را پذیرفت که معادله (۴-۶۱) در دنیای واقعی همواره صادق نیست. به عبارتی، همواره بین $\tilde{R}_k$ و $\tilde{R}$ اختلاف وجود دارد. برای رفع این مشکل، یک متغیر انحراف کلی با پارامتر مثبت ρ را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\tilde{e}_{ij}^{(k)}=\left|r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right|^{\rho}+\left|r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right|^{\rho}\ \ \rho>0$$
$$\text{for all}\ \ i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m\quad k=1, 2, ..., t \tag{۴-۶۲}$$

سپس، تابع انحراف زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\tilde{F}_{\rho}(\lambda)=\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_j\tilde{e}_{ij}^{(k)}\right)^{1/\rho} \tag{۴-۶۳}$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}w_j\left(\left|r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right|^{\rho}+\left|r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right|^{\rho}\right)\right)^{1/\rho}\quad \rho>0$$

[1] Collective Uncertain Decision Matrix

در تابع انحراف فوق، $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ بیانگر بردار وزن شاخصه‌های u_j است که در آن $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j =1$ می‌باشد، که این بردار از قبل توسط خبرگان معین شده است.

به منظور بدست آوردن بردار وزن $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ مربوط به خبرگان $d_k \ (k=1, 2, ..., t)$، مدل بهینه‌سازی غیرخطی زیر را تشکیل می‌دهیم (ژوو و کای، (۲۰۱۲)[1]):

$$\textbf{(M-4.1)} \ \tilde{F}_\rho(\lambda^*) = \min \ \tilde{F}_\rho(\lambda)$$

$$= \min \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{L(k)} \right|^\rho + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{U(k)} \right|^\rho \right) \right)^{1/\rho} \quad (\rho > 0)$$

$$s.\ t. \quad \lambda_k \geq 0, \ \ k=1, 2, ..., t \ , \ \sum_{k=1}^{t} \lambda_k =1$$

جهت حل مدل (M-4.1)، روند زیر را که برگرفته از الگوریتم ژنتیک است طی می‌کنیم (ژوو و کای، (۲۰۱۲)):

گام ۱) پارامتر ρ را ثابت و حداکثر تعداد تکرار $s*$ را معین کنید. سپس، به صورت تصادفی جمعیت اولیه $\Theta^{(s)} = \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ ... \ , \ \lambda^{(p)}\}$ را تولید نمائید، که در آن $s=0$ است و $\lambda^{(l)} = \{\lambda_1^{(l)}, \lambda_2^{(l)}, ..., \lambda_t^{(l)}\}$ $(l=1, 2, ..., p)$ بردارهای وزنی خبرگان (یا کروموزومها) می‌باشند. سپس وزن شاخصه‌ها w_j و تمام ماتریسهای تصمیم نرمال مربوط به هر خبره $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را به عنوان ورودی به الگوریتم وارد کنید.

گام ۲) بر اساس مدل بهینه‌سازی غیرخطی *(M-4.1)*، تابع برازش را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\tilde{F}_\rho(\lambda^{(l)}) = \left(\sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^{(l)} r_{ij}^{L(k)} \right|^\rho + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^{(l)} r_{ij}^{U(k)} \right|^\rho \right) \right)^{1/\rho} \qquad (۴-۶۴)$$

[1] Xu and Cai (2012b)

سپس، مقادیر برازش $\tilde{F}_\rho(\lambda^{(l)})$ را برای هر $\lambda^{(l)}$ در جمعیت فعلی $\Theta^{(s)}$ محاسبه نمائید. شایان ذکر است $\lambda_k^{(l)} \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k^{(l)} = 1$ است.

گام ۳) بردارهای جدید وزن (یا کروموزومها) را از طریق آمیزش بردارهای فعلی وزن، تولید کرده و سپس عملگرهای جهش و بازتولید را همزمان با آمیزش کروموزومهای والد، بر روی آنها اعمال کنید. (آمیزش، جهش و بازتولید سه عملگر مهم در حوزه الگوریتم ژنتیک برای تولید کروموزمهای جدید از روی کروموزمهای نسل قبل هستند. ضمنا در اینجا بردار وزن، بمثابه کروموزم و عناصر آن، بمثابه ژنهای آن کروموزم هستند).

گام ٤) اعضای جمعیت فعلی $\Theta^{(s)}$ را به منظور ایجاد فضا برای بردارهای وزن جدید، حذف نمائید. (بر اساس منطق الگوریتم ژنتیک، هر نسل، جایگزین نسل قبلی خودش می‌شود).

گام ۵) از معادله (۴-۶۴) برای محاسبه مقادیر برازش بردارهای وزن جدید استفاده کرده و این بردارهای وزن جدید را در جمعیت فعلی $\Theta^{(s)}$ قرار دهید.

گام ٦) اگر کاهش در حداقل مقدار برازش ایجاد نشد یا $s = s^*$ شد، به گام هفتم بروید؛ در غیراینصورت $s = s + 1$ قرار داده و به گام سوم بازگردید.

گام ۷) حداقل مقدار برازش $\tilde{F}_\rho(\lambda^*)$ و λ^* متناظرش را به عنوان خروجی در نظر بگیرید.

بر اساس بردار وزن بهینه λ^* و معادله (۴-۱۵)، ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times m}$ را بدست آورده و سپس از عملگر UWA یعنی

$$\tilde{z}_i(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴-۶۵)$$

به منظور تجمیع تمامی مقادیر شاخصه‌ها در iامین سطر از ماتریس $\tilde{R}$ و بدست آوردن مقدار کلی شاخصه $\tilde{r}_i$ متناظر با گزینه x_i استفاده کنید. شایان ذکر است که در اینجا $\tilde{z}_i(w) = [z_i^L(w), z_i^U(w)]$ می‌باشد.

به منظور رتبه‌بندی مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$، امید ریاضی آنها را محاسبه می‌کنیم:

$$E(\tilde{z}_i(w)) = \eta z_i^L(w) + (1-\eta) z_i^U(w), \quad \eta \in [0, 1], \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۴-۶۶)$$

و سپس گزینه‌های x_i را رتبه‌بندی کرده و بهترین گزینه را مطابق مقادیر $E(\tilde{z}_i(w))$ انتخاب می‌کنیم.

در عمل معمولاً مقدار $\rho = 1$ در نظر می‌گیریم و در نتیجه مدل *(M-4.1)* به یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$\textbf{(M-4.2)} \quad \tilde{F}(\lambda^*) = \min \tilde{F}(\lambda)$$
$$= \min \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$
$$s.\ t. \quad \lambda_k \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, t \;, \; \sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$$

جواب بهینه مدل فوق نیز می‌تواند از روند ارائه شده برای مدل *(M-4.1)* یا روش سیمپلکس (دانتزیک، (۱۹۶۳)[1]) محاسبه شود.

۲-۵-٤ مثال کاربردی

مثال ۸-٤ از مثال (۱-۱۴) به‌منظور روشن‌سازی روش ارائه شده در بخش (۴-۵-۲) استفاده می‌کنیم. فرض کنید بردار وزن شاخصه‌های $u_j \; (j = 1, 2, 3, 4)$ به صورت $w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$ باشد. گروه خبرگان این مسئله، متشکل از سه نفر خبره $d_k (k = 1, 2, 3)$ می‌باشد. این خبرگان پروژه‌های سرمایه‌گذاری (گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$) را با در نظر گرفته شاخصه‌های مربوطه ارزیابی کرده و هریک از آنان، ماتریسهای تصمیم غیرقطعی خود را تشکیل می دهند. این ماتریسها در جداول (۴-۱۰) تا (۴-۱۲) نشان داده شده‌اند.

[1] Dantzig (1963)

جدول ۱۰-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[5.5, 6.0]	[5.0, 6.0]	[4.5, 5.0]	[0.4, 0.6]
x_2	[9.0, 10.5]	[6.5, 7.0]	[5.0, 6.0]	[1.5, 2.0]
x_3	[5.0, 5.5]	[4.0, 4.5]	[3.5, 4.0]	[0.4, 0.5]
x_4	[9.5, 10.0]	[5.0, 5.5]	[5.0, 7.0]	[1.3, 1.5]
x_5	[6.5, 7.0]	[3.5, 4.5]	[3.0, 4.0]	[0.8, 1.0]

جدول ۱۱-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[5.0, 5.5]	[5.0, 5.5]	[4.5, 5.5]	[0.4, 0.5]
x_2	[10.0, 11.0]	[6.0, 7.0]	[5.5, 6.0]	[1.5, 2.5]
x_3	[5.0, 6.0]	[4.0, 5.0]	[3.0, 4.5]	[0.4, 0.6]
x_4	[9.0, 10.0]	[5.0, 6.0]	[5.5, 6.0]	[1.0, 2.0]
x_5	[6.0, 7.0]	[3.0, 4.0]	[3.0, 3.5]	[0.8, 0.9]

جدول ۱۲-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[5.2, 5.5]	[5.2, 5.4]	[4.7, 5.0]	[0.3, 0.5]
x_2	[10.0, 10.5]	[6.5, 7.5]	[5.5, 6.0]	[1.6, 1.8]
x_3	[5.0, 5.5]	[3.0, 4.0]	[3.0, 4.0]	[0.3, 0.5]
x_4	[9.5, 10.0]	[4.5, 5.5]	[5.0, 6.0]	[1.2, 1.4]
x_5	[6.5, 7.0]	[3.5, 5.0]	[3.0, 5.0]	[0.7, 0.9]

ابتدا با استفاده از معادلات (۴-۱۳) و (۴-۱۴)، ماتریسهای تصمیم غیرقطعی $\left(k=1, 2, 3\right)$ $\tilde{A}_k$ را نرمال کرده و به ماتریسهای تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}_k$ می‌رسیم که در جداول (۴-۱۳)، (۴-۱۴) و (۴-۱۵) نشان داده شدند.

جدول ۴-۱۳ ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.22, 0.26]	[0.18, 0.25]	[0.17, 0.24]	[0.22, 0.43]
x_2	[0.13, 0.16]	[0.24, 0.29]	[0.19, 0.29]	[0.07, 0.11]
x_3	[0.24, 0.29]	[0.15, 019]	[0.13, 0.19]	[0.26, 0.43]
x_4	[0.13, 0.15]	[0.18, 0.23]	[0.19, 0.33]	[0.09, 0.13]
x_5	[0.19, 0.22]	[0.13, 0.19]	[0.12, 0.19]	[0.13, 0.21]

جدول ۴-۱۴ ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.23, 0.29]	[0.18, 0.24]	[0.18, 0.26]	[0.25, 0.44]
x_2	[0.12, 0.15]	[0.22, 0.30]	[0.22, 0.28]	[0.05, 0.12]
x_3	[0.21, 0.29]	[0.15, 0.22]	[0.12, 0.21]	[0.21, 0.44]
x_4	[0.13, 0.16]	[0.18, 0.26]	[0.22, 0.28]	[0.06, 0.18]
x_5	[0.18, 0.24]	[0.11, 0.17]	[0.12, 0.16]	[0.14, 0.22]

جدول ۴-۱۵ ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.24, 0.27]	[0.19, 0.24]	[0.18, 0.24]	[0.21, 0.52]
x_2	[0.13, 0.14]	[0.24, 0.33]	[0.21, 0.28]	[0.06, 0.10]
x_3	[0.24, 0.29]	[0.11, 0.18]	[0.12, 0.19]	[0.21, 0.52]
x_4	[0.13, 0.15]	[0.16, 0.24]	[0.19, 0.28]	[0.07, 0.13]
x_5	[0.19, 0.22]	[0.13, 0.22]	[0.12, 0.24]	[0.12, 0.22]

بر اساس ماتریسهای تصمیم نرمال $\tilde{R}_k (k=1, 2, 3)$، از روند ارائه شده در بخش (۴-۵-۱) به منظور حل مدل *(M-4.2)* استفاده کرده (فرض کنید $\rho=1$ باشد) و بردار وزن بهینه خبرگان و مقدار هدف بهینه متناظر آن را به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$\lambda^* = (0.5455, 0.2727, 0.1818) \quad F\left(\lambda^*\right) = 0.3157$$

بر اساس بردار وزن بهینه λ^* و معادله (۴-۱۵)، ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{5\times 4}$ را بدست می‌آوریم که مقادیر این ماتریس در جدول (۴-۱۶) بیان شده‌اند:

جدول ٤-١٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R}$ به ازای λ^*

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.226, 0.270]	[0.182, 0.245]	[0.175, 0.245]	[0.226, 0.449]
x_2	[0.127, 0.154]	[0.235, 0.300]	[0.202, 0.285]	[0.063, 0.111]
x_3	[0.232, 0.290]	[0.143, 0.196]	[0.125, 0.195]	[0.237, 0.449]
x_4	[0.130, 0.153]	[0.176, 0.240]	[0.198, 0.307]	[0.078, 0.144]
x_5	[0.187, 0.225]	[0.125, 0.190]	[0.120, 0.191]	[0.131, 0.215]

سپس، بر اساس جدول (۴-۱۶)، از عملگر *UWA* در معادله (۴-۶۵) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w)$ متناظر با هر گزینه x_i استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w) = [0.192, 0.270], \tilde{z}_2(w) = [0.183, 0.246], \tilde{z}_3(w) = [163, 0.240]$$
$$\tilde{z}_4(w) = [166, 0.240], \tilde{z}_5(w) = [136, 0.200]$$

به منظور رتبه‌بندی مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$، با استفاده از معادله (۴-۶۶) امید ریاضی مربوط به هر یک را محاسبه می‌کنیم. ($\eta = 0.5$ را در نظر بگیرید):

$$E(\tilde{z}_1(w)) = 0.231, \ E(\tilde{z}_2(w)) = 0.214, \ E(\tilde{z}_3(w)) = 0.202$$
$$E(\tilde{z}_4(w)) = 0.203, \ E(\tilde{z}_5(w)) = 0.168$$

سپس، گزینه‌ها x_i را بر اساس مقادیر $E(\tilde{z}_i(w))\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$$

که از روی این رتبه‌بندی مشخص می‌شود که بهترین پروژه جهت سرمایه‌گذاری x_1 است.

اگر همه خبرگان $d_k\,(k=1,2,3)$ دارای وزنهای یکسان باشند، یعنی $\lambda_1^*=\lambda_2^*=\lambda_3^*=\frac{1}{3}$؛ آنگاه از عملگر میانگین غیرقطعی یعنی:

$$\tilde{r}_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\tilde{r}_{ij}^{(k)}=\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}r_{ij}^{L(k)},\ \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}r_{ij}^{U(k)}\right]\quad i=1,2,3,4,5,\ \ j=1,2,3,4 \qquad (۴-۶۷)$$

به منظور تلفیق ماتریسهای تصمیم نرمال غیرقطعی انفرادی $(k=1,2,3)$ $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{5\times4}$ و تشکیل ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{5\times4}$ استفاده می‌کنیم که این ماتریس در جدول (۴-۱۷) نشان داده شده است:

جدول ۱۷-٤ ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R}$ به ازای λ^*

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.230, 0.273]	[0.183, 0.243]	[0.177, 0.247]	[0.227, 0.463]
x_2	[0.127, 0.150]	[0.233, 0.307]	[0.207, 0.283]	[0.060, 0.110]
x_3	[0.230, 0.290]	[0.137, 0.197]	[0.123, 0.243]	[0.227, 0.463]
x_4	[0.130, 0.153]	[0.173, 0.243]	[0.200, 0.273]	[0.073, 0.147]
x_5	[0.187, 0.227]	[0.123, 0.193]	[0.120, 0.197]	[0.130, 0.217]

سپس با استفاده از معادله (۴-۶۵)، مقادیر کلیه شاخصه‌ها برای گزینه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w)=[0.194,\ 0.250],\ \ \tilde{z}_2(w)=[0.180,\ 0.243]\ \ \tilde{z}_3(w)=[0.157,\ 0.268],$$
$$\tilde{z}_4(w)=[0.169,\ 0.232]\ \ \tilde{z}_5(w)=[0.135,\ 0.204]$$

همچنین، امید ریاضی متناظر مقادیر کلی شاخصه‌ها نیز با استفاده از معادله (۴-۶۶) با فرض $\eta=0.5$ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$E(\tilde{z}_1(w))=0.222,\ \ E(\tilde{z}_2(w))=0.211,\ E(\tilde{z}_3(w))=0.213$$
$$E(\tilde{z}_4(w))=0.201,\ E(\tilde{z}_5(w))=0.169$$

سپس گزینه‌ها را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_5$$

مشخص می‌شود که بهترین پروژه جهت سرمایه‌گذاری x_1 است. همچنین، مقدار هدف با در نظر گرفتن $\rho = 1$ برابر $F\left(\lambda^*\right) = 0.3635$ می‌باشد.

بر اساس پاسخهای عددی فوق، می‌توان دید که مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها، که با استفاده از وزنهای یکسان برای خبرگان و عملگر میانگین غیرقطعی (۴–۶۷) بدست آمده، با مقادیری که از مدل (*M-4.2*) و عملگر *UWA* (۴–۶۵) بدست آمده، متفاوت است و همچنین رتبه‌بندی گزینه‌های x_i نیز کمی تفاوت دارد. به علاوه، مقدار تابع هدف متناظر با اوزان یکسان و تحت شرایط $\rho = 1$، بیشتر از مقدار حاصل از حل مدل (*M-4.2*) می‌باشد.

تحلیلهای مشابهی نیز می‌توان با در نظر گرفتن مجموعه داده‌های ناهمگن یا متناقض ارائه شده توسط خبرگان انجام داد. مقایسه نتایج بکارگیری این روش (ژوو و کای، (۲۰۱۲)[1]) با سایر روشهای موجود، نشان می‌دهد که روش فوق قادر است به تصمیم‌گیری گروهی با سطح بالاتری از توافق در میان خبرگان منجر شود. در حقیقت، این نتیجه مهم را می‌توان طبق قضیه زیر به بطور نظری نیز اثبات و تضمین کرد.

قضیه ٤–٤ فرض کنید $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_t^*)$ بردار وزن خبرگان منتج از مدل (*M-4.2*) بوده و $\lambda^- = (\lambda_1^-, \lambda_2^-, ..., \lambda_t^-)$ بردار وزن خبرگان، حاصل از سایر روشها باشد. حال اگر $\tilde{F}(\lambda^*)$ و $\tilde{F}(\lambda^-)$ مقادیر تابع هدف متناظر باشد، آنگاه $\tilde{F}(\lambda^*) \le \tilde{F}(\lambda^-)$ است.

اثبات بر اساس مدل (*M-4.2*) داریم:

$$\tilde{F}(\lambda^-) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^- r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^- r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$

$$F(\lambda^*) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^* r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^* r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$

[1] Xu and Cai (2012b)

$$= \min \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$

از آنجاکه:

$$\min \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\left| r_{ij}^{L(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^- r_{ij}^{L(k)} \right| + \left| r_{ij}^{U(k)} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_k^- r_{ij}^{U(k)} \right| \right)$$

آنگاه $\tilde{F}(\lambda^*) \leq \tilde{F}(\lambda^-)$ است، که اثبات را کامل می‌کند.

فصل پنجم

حل مسائل *MADM* فاصله‌ای با اطلاعات نامعلوم اوزان

تاکنون تحقیقات اندکی در زمینه روشهای *MADM* فاصله‌ای با اطلاعات نامعلوم اوزان انجام شده است. در این فصل، ابتدا بر اساس درجات انحراف اعداد فاصله‌ای و ایده بیشینه‌سازی انحراف شاخصه‌ها، به معرفی یک فرمول ساده و سرراست می‌پردازیم. در ادامه، برای شرایطی که تصمیم‌گیرنده هیچ ترجیحی بر روی گزینه‌ها ندارد، به معرفی یک روش *MADM* مبتنی بر درجات امکان و درجات انحراف اعداد فاصله‌ای می‌پردازیم. سپس، برای شرایطی که تصمیم‌گیرنده ترجیحی بر روی گزینه‌ها دارد، یک روش *MADM* دیگر معرفی می‌کنیم که نه‌تنها اطلاعات فازی پیشین[1] در مورد ارزیابی گزینه‌ها را در نظر می‌گیرد، بلکه حتی‌الامکان انتظارات ذهنی تصمیم‌گیرنده را برآورده می‌سازد. در انتها، روش دیگری برای رتبه‌بندی گزینه‌ها مبتنی بر عملگر *UOWA* معرفی می‌کنیم و مدل بیشینه‌سازی وفاق[2] خبرگان را برای تعیین اوزان شاخصه‌ها در مسائل *MAGDM* غیرقطعی معرفی می‌کنیم. همچنین، به منظور سهولت فهم خواننده و تسلط او بر روی روشهای پیشنهادی، این روشها را با کمک مثالهای کاربردی تمرین خواهیم کرد.

---

[1] Priori
[2] Consensus Maximization Model

۵-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه بدون ترجیحات روی گزینه‌ها

۵-۱-۱ فرمولها و مفاهیم

در یک مسئله $MADM$ که در آن بردار وزن شاخصه‌ها برابر $w=(w_1,\, w_2,\, ...w_m)$ است و در محدودیت واحد بودن صدق می‌کند، یعنی:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j^2 = 1, \quad j=1,\, 2,\, ...,\, m, \quad w_j \geq 0 \qquad (۵-۱)$$

فرض کنید یک ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ داشته باشیم که در آن $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L,\, a_{ij}^U]$ به صورت اعداد فاصله‌ای به ازای مقادیر $i=1,\, 2,\, ...,\, n$ و $j=1,\, 2,\, ...,\, m$ بوده، لذا ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{A}$ برابر $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ می‌باشد.

به منظور محاسبه درجه شباهت میان دو عدد فاصله‌ای، ابتدا مفهوم درجه انحراف اعداد فاصله‌ای را بیان می‌کنیم:

تعریف ۵-۱ دو عدد فاصله‌ای $\tilde{a}=[a^L,\, a^U]$ و $\tilde{b}=[b^L,\, b^U]$ را در نظر بگیرید. اگر:

$$\left\|\tilde{a}-\tilde{b}\right\| = \left|b^L - a^L\right| + \left|b^U - a^U\right|$$

آنگاه $d(\tilde{a},\, \tilde{b})=\left\|\tilde{a}-\tilde{b}\right\|$ درجه انحراف یا مغایرت دو عدد فاصله‌ای $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ نامیده می‌شود. واضح است که هرچه مقدار $d(\tilde{a},\, \tilde{b})$ بیشتر باشد، درجه انحراف بین این دو عدد فاصله‌ای نیز بیشتر خواهد بود. در حالت خاصی که $d(\tilde{a},\, \tilde{b})=0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{a}=\tilde{b}$ است.

۵-۱-۲ روش تصمیم‌گیری

یک مسئله $MADM$ را در حالت کلی نظر بگیرید. لازمه حل چنین مسئله‌ای آن است که مقادیر کلی شاخصه‌ها روی یک سری گزینه (یعنی عملکرد کلی گزینه‌ها) معین شود. این مقادیر را می‌توان به وسیله

عملگر UWA (۴-۱۵) از روی ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ و بردار وزن شاخصه‌ها یعنی $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ محاسبه کرد.

در مواردی که اوزان شاخصه‌ها $w_j\,(j=1, 2, ..., m)$ اعداد حقیقی معلومی باشند، رتبه‌بندی گزینه‌ها $x_i\,(i=1, 2, ..., n)$ را می‌توان به وسیله مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ بدست آورد؛ در غیر اینصورت نمی‌توان مقادیر کلی شاخصه‌ها را از روی معادله (۴-۱۵) بدست آورد.

در ادامه، موقعیتهایی را در نظر می‌گیریم که در آنها وزن شاخصه‌ها به طور کامل نامعلوم است، مقادیر شاخصه‌ها اعداد فاصله‌ای است و تصمیم‌گیرنده نیز هیچ ترجیحی روی گزینه‌ها ندارد.

از آنجا که عناصر ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ اعداد فاصله‌ای هستند و نمی‌توانند به طور مستقیم مقایسه شوند، پس بر مبنای تحلیلهای انجام شده در بخش (۵-۱) و تعریف (۵-۱)، $d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{kj})=\left\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\right\|$ را درجه انحراف بین عناصر $\tilde{r}_{ij}$ و $\tilde{r}_{kj}$ در $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ می‌نامیم که در آن:

$$\left\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{kj}\right\|=\left|r_{ij}^L-r_{kj}^L\right|+\left|r_{ij}^U-r_{kj}^U\right|$$

برای شاخصه u_j، اگر $D_{ij}(w)$ را به عنوان انحراف بین گزینه x_i و سایر گزینه‌ها بدانیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$D_{ij}(w)=\sum_{l=1}^{n}\left\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{r}_{lj}\right\|w_j=\sum_{l=1}^{n}d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{lj})w_j,\ i=1, 2, ..., n,\ j=1, 2, ..., m \qquad (۵-۲)$$

حال فرض کنید تابع تجمع انحرافات بصورت زیر باشد:

$$D_j(w)=\sum_{i=1}^{n}D_{ij}(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{lj})w_j,\ j=1, 2, ..., n \qquad (۵-۳)$$

در واقع برای هر شاخصه u_j، تابع $D_j(w)$ نشان‌دهنده انحراف تجمعی هر گزینه از سایر گزینه‌ها با توجه به این شاخصه می‌باشد. حال یک بردار وزن عقلانی[1] w آن بردار وزنی است که بتواند مجموع انحرافات

[1] Reasonable Weight

تجمعی تمام گزینه‌ها با در نظر گرفتن تمام شاخصه‌ها، را بیشینه سازد. برای این منظور، تابع انحراف زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\max\ D(w)=\sum_{j=1}^{n} D_j(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})w_j \qquad (۵-۴)$$

توجه کنید که فرمول (۵-۲) برای محاسبه انحراف یک گزینه با سایر گزینه‌ها از نقطه نظر یک شاخصه است. فرمول (۵-۳) برای محاسبه انحرافات تمامی گزینه‌ها نسبت بهم از نقطه نظر یک شاخصه است و نهایتاً فرمول (۵-۴) به‌منظور محاسبه انحرافات همه گزینه‌ها نسبت بهم از نقطه نظر تمامی شاخصه‌هاست. از این رو، حل بردار وزن شاخصه w معادل حل مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر است (ژوو و سان، (۲۰۰۲)[1]):

$$\textbf{(M-5.1)}\begin{cases}\max\ D(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})w_j & (۵-۵)\\ s.t.\ \sum_{j=1}^{m} w_j^2=1,\ w_j\ge 0,\ \ j=1,2,\dots,m & (۵-۶)\end{cases}$$

با حل مدل فوق خواهیم داشت:

$$w_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})\right)^2}},\quad j=1,2,\dots,n \qquad (۵-۷)$$

و با نرمال‌سازی آن به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$w_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{lj})\right)},\ j=1,2,\dots,n \qquad (۵-۸)$$

[1] Xu and Sun (2002)

ویژگی معادله (۵–۸) این است که از درجات انحراف اعداد فاصله‌ای استفاده کرده تا تمامی اطلاعات معلوم تصمیم را در قالب یک فرمول ساده با هم ادغام و یا متحد[1] کند. چنین امری، پیاده‌سازی آن را در کامپیوتر یا ماشین حساب تسهیل می‌کند.

پس از حصول بردار وزن بهینه w شاخصه‌ها، ما همچنان به محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ برای تمامی گزینه‌ها با استفاده از معادله (۴–۱۵) نیاز خواهیم داشت. از آنجاکه تمامی $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ ها نیز اعداد فاصله‌ای هستند، رتبه‌بندی مستقیم گزینه‌ها کار راحتی نیست. بنابراین، می‌توانیم از معادله (۴–۲) برای محاسبه درجات امکان مقایسه اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ استفاده کرده و پس از آن، ماتریس درجات امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهیم که در آن $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(w)\geq \tilde{z}_j(w))$ ، به ازای $i,\ j=1, 2, ..., n$ است. سپس، از معادله (۴–۶) به منظور محاسبه بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P استفاده کرده و گزینه‌ها را بر اساس عناصر v به صورت نزولی مرتب کرده و گزینه بهینه را پیدا می‌کنیم.

حال مطابق با تحلیلهای فوق‌الذکر، الگوریتم زیر را معرفی می‌کنیم (ژوو و سان، (۲۰۰۲)[2]):

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، تصمیم‌گیرنده، گزینۀ x_i را بر اساس هر یک از شاخصه‌ها یعنی u_j ارزیابی می‌کند (عملکرد جزیی هر گزینه). شایان ذکر است که مقادیر این ارزیابی در قالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ بیان می‌شوند. تمامی $\tilde{a}_{ij}$ ها، به ازای $(i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m)$، در یک ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ قرار دارند، که فرم نرمال آن را در ماتریس $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ قرار می‌دهیم.

گام ۲) از معادله (۵–۷) برای بدست آوردن بردار وزن $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, ..., m)$ استفاده نمائید.

[1] Unify
[2] Xu and Sun (2002)

گام ۳) از معادله (۴-۱۵) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ برای گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ استفاده کنید (عملکرد کلی هر گزینه).

گام ٤) معادله (۴-۲) را برای محاسبه درجات امکان مقایسات اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ به کار گرفته و ماتریس درجات امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P را بدست آورید.

گام ٦) گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ را بر اساس عناصر v به صورت نزولی مرتب و گزینه بهینه را بدست آورید.

۳-۱-۵ مثال کاربردی

مثال ۱-۵ مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن یک یگان نظامی قصد خرید اسلحه برای نیروهای خود را دارد. چهار سری اسلحه به عنوان گزینه $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ در این مسئله وجود دارند که باید با توجه به پنج شاخصه ارزیابی شوند: (۱) u_1: قابلیت آتش هجومی، (۲) u_2: قابلیت واکنش، (۳) u_3: قابلیت مانور، (۴) u_4: قابلیت نجات و (۵) u_5: هزینه. مقادیر ارزیابی برای هر اسلحه $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ با توجه به شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, 3, 4)$ (یعنی عملکرد جزیی گزینه‌ها) در جدول (۵-۱) ذکر شده است:

جدول ۱-۵ ماتریس تصمیم غیر قطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[26000, 27000]	[2, 4]	[18000, 19000]	[0.7, 0.8]	[15000, 16000]
x_2	[60000, 70000]	[3, 4]	[16000, 17000]	[0.3, 0.4]	[27000, 28000]
x_3	[50000, 60000]	[2, 3]	[15000, 16000]	[0.7, 0.8]	[24000, 26000]
x_4	[40000, 50000]	[1, 2]	[28000, 29000]	[0.4, 0.5]	[15000, 17000]

در بین شاخصه‌ها، u_5 از جنس هزینه و مابقی از جنس سود می‌باشند. اکنون، از روش بخش (۵-۱-۲) برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰)، ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ را نرمال می‌کنیم و ماتریس $\tilde{R}$ را بدست می‌آوریم که مقادیر آن در جدول (۵-۲) موجود است:

جدول ۲-۵ ماتریس تصمیم نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.240,0.295]	[0.298,0.943]	[0.431,0.477]	[0.538,0.721]	[0.571,0.663]
x_2	[0.554,0.765]	[0.447,0.943]	[0.383,0.426]	[0.231,0.361]	[0.326,0.368]
x_3	[0.462,0.656]	[0.298,0.707]	[0.359,0.401]	[0.538,0.721]	[0.351,0.414]
x_4	[0.369,0.546]	[0.149,0.471]	[0.670,0.728]	[0.308,0.451]	[0.537,0.663]

گام ۲) از طریق معادله (۵-۷)، بردار وزن شاخصه‌های w را بدست می‌آوریم:

$$w = (0.2189,\ 0.2182,\ 0.1725,\ 0.2143,\ 0.1761)$$

گام ۳) از معادله (۴-۱۵) به منظور محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها (یعنی عملکرد کلی گزینه‌ها) در قالب اعداد فاصله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w) = [0.4077,\ 0.6239]\ ,\quad \tilde{z}_2(w) = [0.3918,\ 0.5888]$$
$$\tilde{z}_3(w) = [0.40527,\ 0.5945]\ ,\quad \tilde{z}_4(w) = [0.3994,\ 0.5613]$$

گام ٤) مقادیر $\tilde{z}_i(w)(i = 1, 2, 3, 4)$ را به صورت دو به دو مقایسه کرده و سپس ماتریس درجات امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5617 & 0.5393 & 0.6042 \\ 0.4383 & 0.5 & 0.4753 & 0.5405 \\ 0.4607 & 0.5247 & 0.5 & 0.5678 \\ 0.3958 & 0.4595 & 0.4322 & 0.5 \end{pmatrix}$$

و از معادله (۴-۶) برای محاسبه بردار اولویت مربوط به ماتریس درجات امکان P استفاده می‌کنیم:

$$v = (0.2671,\ 0.2462,\ 0.2544,\ 0.2323)$$

گام ۵) از بردار اولویت v و ماتریس درجات امکان P برای رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w) \underset{0.5393}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{0.5247}{\geq} \tilde{z}_2(w) \underset{0.5405}{\geq} \tilde{z}_4(w)$$

گام ٦) گزینه‌های $x_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ را بر حسب مقادیر $\tilde{z}_i(w)(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_1 \underset{0.5393}{\succ} x_3 \underset{0.5247}{\succ} x_2 \underset{0.5405}{\succ} x_4$$

که نشان می‌دهد x_1 بهترین گزینه است.

۵-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه با ترجیح روی گزینه‌ها

۵-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

در یک مسئله $MADM$ که در آن وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم بوده و مقادیر شاخصه‌ها به صورت اعداد فاصله‌ای بیان می‌شوند، اگر تصمیم‌گیرنده روی گزینه x_i ترجیحی داشته باشد، آنگاه مقدار ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده را برابر $\tilde{\vartheta}_i$ می دانیم. (که $\tilde{\vartheta}_i = [\vartheta_i^L,\ \vartheta_i^U]$ و $0 \leq \vartheta_i^L \leq \vartheta_i^U \leq 1$ است). ترجیحات ذهنی می‌تواند توسط تصمیم‌گیرنده یا سایر روشها بدست آید. در اینجا ما مقادیر شاخصه‌ها $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L,\ r_{ij}^U]$ در ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را به عنوان مقادیر ترجیح واقعی یا عینی گزینه x_i با توجه به شاخصه u_j در نظر می‌گیریم.

به دلیل وجود برخی محدودیتها ناشی از شرایط خاص چنین مسائلی، معمولا بین مقدار ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده و مقدار ترجیح واقعی یا عینی تفاوتی وجود دارد. برای اخذ یک تصمیم مناسب، باید بردار وزن شاخصه یعنی w طوری انتخاب شود که مقدار این اختلاف را کمینه سازد.

با در نظر گرفتن اینکه عناصر ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ و مقادیر ترجیحات ذهنی فراهم شده توسط تصمیم‌گیرنده به شکل اعداد فاصله‌ای هستند، طبق تعریف (۵-۱)، می‌توان مدل بهینه‌سازی تک هدفه زیر را تشکیل داد (ژوو، (۲۰۰۲)[1]):

$$\textbf{(M-5.2)}\quad \begin{cases} \min\ F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(d(\tilde{r}_{ij},\tilde{\vartheta}_i)w_j\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d^2(\tilde{r}_{ij},\tilde{\vartheta}_i)w_j^2 \\ s.t.\ \sum_{j=1}^{m}w_j=1,\ w_j\ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,m \end{cases}$$

که در آن:

$$d(\tilde{r}_{ij},\tilde{\vartheta}_i)=\left\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{\vartheta}_i\right\|=\left|r_{ij}^L-\vartheta_i^L\right|+\left|r_{ij}^U-\vartheta_i^U\right|$$

نشان‌دهنده انحراف بین مقدار ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده یعنی $\tilde{\vartheta}_i$ با مقدار ترجیح عینی (یا مقدار واقعی آن) یعنی $\tilde{r}_{ij}$ و البته هر دو با توجه به شاخصه u_j و روی گزینه x_i می‌باشد. w_j برابر وزن شاخصه u_j است، تابع تک‌هدفه $F(w)$ نشان‌دهنده انحراف کل میان مقادیر ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده روی تمام گزینه‌ها و مقدار ترجیح واقعی متناظر آن و البته با در نظر گرفتن همه شاخصه‌ها است. برای حل این مدل، تابع لاگرانژ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L(w,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d^2(\tilde{r}_{ij},\tilde{\vartheta}_i)w_j^2+2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}w_j-1\right)$$

با مشتق‌گیری از تابع $L(w,\zeta)$ نسبت به w_j و ζ و برابر صفر قرار دادن آن، معادلات زیر استخراج می‌شوند:

[1] Xu (2002b)

$$\begin{cases} \dfrac{L(w, \zeta)}{\partial w_j} = 2\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)^2 w_j + 2\zeta = 0, \quad j = 1, 2, ..., m \\ \dfrac{L(w, \zeta)}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \end{cases}$$

آنگاه:

$$w_j = -\frac{\zeta}{\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)}, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{۵-۹}$$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \tag{۵-۱۰}$$

با توجه به معادلات (۵-۹) و (۵-۱۰)، خواهیم داشت:

$$\zeta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)\right)}} \tag{۵-۱۱}$$

همچنین با استفاده از معادلات (۵-۹) و (۵-۱۱) خواهیم داشت:

$$w_j = \frac{\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)}}{\sum_{j=1}^{m} \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)}}, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{۵-۱۲}$$

ویژگی بارز معادله (۵-۱۲) این است که از مفهوم درجه انحراف بین اعداد فاصله‌ای برای یکپارچه کردن تمام اطلاعات معلوم تصمیم (مقادیر شاخصه‌ها) در یک فرمول استفاده می‌کند و همچنین پیاده‌سازی آن در یک کامپیوتر یا ماشین حساب کار راحتی است.

پس از حصول بردار وزن بهینه w شاخصه‌ها، ما همچنان باید مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ برای گزینه‌ها (یعنی عملکرد کلی گزینه‌ها) را با استفاده از معادله (۴-۱۵)

محاسبه کنیم. از آنجاکه $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ ها نیز خودشان اعداد فاصله‌ای هستند. لذا، رتبه‌بندی گزینه‌ها بطور مستقیم کار ساده و راحتی نیست. بنابراین، می‌توانیم از معادله (۴-۲) برای محاسبه درجات امکان مقایسه دو عدد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ استفاده کنیم و پس از آن، ماتریس درجات امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهیم، که در آن $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(w)\geq \tilde{z}_j(w))$ به ازای $(i,\ j=1, 2, ..., n)$ است. سپس، از معادله (۴-۶) برای بدست آوردن بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P استفاده می‌کنیم و گزینه‌ها را بر اساس عناصر موجود در v به صورت نزولی رتبه‌بندی می‌کنیم.

بر اساس تحلیلهـای فـوق، ایـن روش تصـمیم‌گیـری را بـه صـورت الگـوریتم زیـر خلاصـه مـی‌کنـیم (ژوو، (۲۰۰۲)[۱]):

گام ۱) تصمیم‌گیرنده گزینه‌های x_i را با توجه به شاخصه‌های u_j موجود در مسئله در قالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ ارزیابی می‌کند (عملکرد جزیی گزینه‌ها). تمامی مقادیر ارزیابی $\tilde{a}_{ij}(i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m)$ در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ قرار می‌گیرند که فرم نرمال شده آن $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ است.

گام ۲) تصمیم‌گیرنده مقادیر ترجیحات ذهنی خود، $\tilde{\vartheta}_i(i=1, 2, ..., n)$، بر روی گزینه‌ها $x_i(i=1, 2, ..., n)$ را بیان کند.

گام ۳) از معادله (۵-۱۲) برای بدست آوردن بردار وزن $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., n)$ استفاده نمائید.

گام ٤) از معادله (۴-۱۵) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ برای گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ (عملکرد کلی گزینه‌ها) استفاده نمائید.

[1] Xu (2002b)

گام ۵) معادله (۴-۲) را برای محاسبه درجات امکان مربوط به مقایسه اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)\ \ (i=1, 2, ..., n)$ به کار گیرید و ماتریس درجات امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٦) بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P را با استفاده از معادله (۴-۶) محاسبه کنید.

گام ۷) گزینه‌های $x_i(i=1, 2, ..., n)$ را بر اساس عناصر موجود در بردار v رتبه‌بندی کرده و گزینهٔ بهینه را بیابید.

جدول ۳-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[85, 90]	[90, 92]	[91, 94]	[93, 96]	[90, 91]	[95, 97]
x_2	[90, 95]	[89, 91]	[90, 92]	[90, 92]	[94, 97]	[90, 93]
x_3	[88, 91]	[84, 86]	[91, 94]	[91, 94]	[86, 89]	[91, 92]
x_4	[93, 96]	[91, 93]	[85, 88]	[86, 89]	[87, 90]	[92, 93]
x_5	[86, 89]	[90, 92]	[90, 95]	[91, 93]	[90, 92]	[85, 87]

۵-۲-۲ مثال کاربردی

مثال ۵-۲ موضوع ارزیابی و انتخاب کادر ستادی برای یک سازمان در قالب یک مسئله *MADM* مطرح شده است. از یک سو، تصمیم‌گیرنده باید افراد با استعدادی را برای جایگاه رهبری انتخاب کند. از سوی دیگر، تصمیم‌گیرنده امیدوار است حتی در صورت شرایط مشابه، بتواند نامزد مرجحی را منصوب نماید (گائو، (۲۰۰۰)[1]). شاخصه‌های در نظر گرفته شده برای انتخاب کادر مورد نظر در این سازمان عبارتند از: (۱) u_1: افکار و اخلاق، (۲) u_2: روحیه کاری، (۳) u_3: قدرت کاری، (۴) G_4: تحصیلات و ساختار دانش، (۵) G_5: قابلیت رهبری و (۶) G_6: ظرفیت توسعه.

---

[1] Gao (2000)

برای این کار ابتدا از گروهی از افراد درخواست شد تا کاندیداهای اولیه را معرفی کرده و سپس با توجه به شاخصه‌های فوق و با استفاده از سیستم نمره‌دهی صدتایی، آنها را (با امتیازی از یک تا صد) ارزیابی کنند. در ادامه و بعد از تحلیلهای آماری، پنج کاندیدای $x_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ شناسایی شدند. اطلاعات تصمیم روی هر کاندیدا با توجه به شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., 6)$ (عملکرد جزیی گزینه‌ها) در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شود و این مقادیر در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ لیست می‌شوند (جدول (۵-۳) را مشاهده کنید):

اکنون از روش ارائه شده در بخش (۵-۲-۱) برای رتبه‌بندی پنج کاندیدا استفاده می‌کنیم:

گام ۱) از آنجاکه تمام شاخصه‌ها از جنس سود هستند، از معادله (۴-۹) برای نرمال‌سازی ماتریس تصمیم استفاده می‌کنیم. ماتریس نرمال به صورت زیر است:

جدول ٤-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.412, 0.455]	[0.443, 0.463]	[0.439, 0.470]
x_2	[0.436, 0.480]	[0.438, 0.458]	[0.434, 0.460]
x_3	[0.427, 0.460]	[0.414, 0.433]	[0.439, 0.470]
x_4	[0.451, 0.485]	[0.448, 0.468]	[0.410, 0.440]
x_5	[0.417, 0.450]	[0.443, 0.463]	[0.434, 0.475]

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.448, 0.476]	[0.438, 0.455]	[0.460, 0.478]
x_2	[0.434, 0.456]	[0.458, 0.485]	[0.438, 0.459]
x_3	[0.438, 0.466]	[0.419, 0.445]	[0.440, 0.454]
x_4	[0.414, 0.441]	[0.424, 0.450]	[0.445, 0.459]
x_5	[0.438, 0.461]	[0.438, 0.460]	[0.411, 0.429]

گام ۲) فرض کنید ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ به شکل زیر باشد:

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.3, 0.5],\ \tilde{\vartheta}_2=[0.5, 0.6],\ \tilde{\vartheta}_3=[0.3, 0.4]$$

$$\tilde{\vartheta}_4=[0.4, 0.6],\ \tilde{\vartheta}_5=[0.4, 0.5]$$

سپس، از فرمول $d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)=\left|r_{ij}^L-\tilde{\vartheta}_i^L\right|+\left|r_{ij}^U-\tilde{\vartheta}_i^U\right|$ به ازای مقادیر $i=(1, 2, 3, 4, 5)$ و $j=(1, 2, ..., 6)$، برای محاسبه انحراف بین مقادیر ترجیح واقعی و ذهنی استفاده می‌کنیم که در جدول (۵-۵) نمایش داده شده است:

جدول ۵-۵ انحراف مقادیر ترجیحات واقعی و ذهنی

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$d(\tilde{r}_{1j}, \tilde{\vartheta}_1)$	0.157	0.180	0.109	0.172	0.183	0.182
$d(\tilde{r}_{2j}, \tilde{\vartheta}_2)$	0.184	0.204	0.206	0.210	0.157	0.206
$d(\tilde{r}_{3j}, \tilde{\vartheta}_3)$	0.187	0.147	0.209	0.204	0.164	0.194
$d(\tilde{r}_{4j}, \tilde{\vartheta}_4)$	0.166	0.180	0.170	0.173	0.174	0.186
$d(\tilde{r}_{5j}, \tilde{\vartheta}_5)$	0.067	0.080	0.059	0.077	0.078	0.082

گام ۳) از آنجاکه وزن تمام شاخصه‌ها نامعلوم است، پس از معادله (۵-۱۲) برای محاسبه بردار وزن شاخصه‌ها استفاده می‌کنیم.

$$w=(0.1794, 0.1675, 0.1727, 0.1490, 0.1855, 0.1458)$$

گام ٤) از معادله (۴-۱۵) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها (یا عملکرد کلی گزینه‌ها) استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w)=[0.4390,\ 0.4654],\ \tilde{z}_2(w)=[0.4396,\ 0.4671],\ \tilde{z}_3(w)=[0.4289,\ 0.4544]$$
$$\tilde{z}_4(w)=[0.4320,\ 0.4575],\ \tilde{z}_5(w)=[0.4348,\ 0.4569]$$

گام ۵) معادله (۴-۲) را بکار گرفته و با مقایسه زوجی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)(i=1,2,3,4,5)$، ماتریس درجات امکان P را تشکیل دهید:

$$P=\begin{bmatrix} 0.5000 & 0.4787 & 0.7033 & 0.6435 & 0.6309 \\ 0.5213 & 0.5000 & 0.7208 & 0.6623 & 0.6512 \\ 0.2967 & 0.2792 & 0.5000 & 0.4392 & 0.4118 \\ 0.3565 & 0.3377 & 0.5608 & 0.5000 & 0.4769 \\ 0.3691 & 0.3488 & 0.5882 & 0.5231 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

گام ٦) بردار اولویت ماتریس P را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست می‌آوریم:

$$v=(0.2228,\ 0.2278,\ 0.1713,\ 0.1866,\ 0.1915)$$

سپس، بر مبنای بردار اولویت v و درجات امکان P، رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای را خواهیم داشت:

$$\tilde{z}_2(w)\underset{0.5213}{\geq}\tilde{z}_1(w)\underset{0.6309}{\geq}\tilde{z}_5(w)\underset{0.5231}{\geq}\tilde{z}_4(w)\underset{0.5608}{\geq}\tilde{z}_3(w)$$

گام ۷) کاندیداهای $x_i(i=1,2,3,4,5)$ را بر اساس مقادیر $\tilde{z}_i(w)(i=1,2,3,4,5)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_2\underset{0.5213}{\succ}x_1\underset{0.6309}{\succ}x_5\underset{0.5231}{\succ}x_4\underset{0.5608}{\succ}x_3$$

که از روی آن مشخص می‌شود که گزینه x_2 گزینه بهینه است.

۳-۵ عملگر *UOWA*

Ω را مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای در نظر بگیرید.

تعریف ۲-۵ گیریم تابع *UOWA* بصورت $UOWA: \Omega^n \to \Omega$ باشد. حال اگر برای این تابع داشته باشیم:

$$UOWA_{\omega}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \tilde{b}_j$$

که در آن، $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزنی عملگر *UOWA* بوده و $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ به ازای $j = 1, 2, ..., n$ و $\omega_j \in [0, 1]$ باشد و نیز $\tilde{a}_i \in \Omega$ بوده و همچنین $\tilde{b}_j$، عملاً j امین دسته بزرگتر نشانوند $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n)$ باشد، آنگاه با این شرایط، تابع *UOWA* را عملگر غیرقطعی *OWA* یا عملگر *UOWA* می‌نامند.

برای استخراج بردار وزنی $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ می‌توان هم از روش ارائه شده در فصل اول، که در معرفی عملگر *OWA* گفته شد، بهره برد و هم از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\omega_k = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right), \ k = 1, 2, ..., n \qquad (۵-۱۳)$$

که f، یک کمّی‌ساز زبانی فازی[1] است:

$$f(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a}, & a \le r \le b \\ 1, & r > b \end{cases} \qquad (۵-۱۴)$$

[1] Fuzzy Linguistic Quantifier

و $a, b, r \in [0, 1]$. چند مثال از کمّی‌سازهای غیرکاهشی فازی برای عبارات زبانی[1] (هررا و همکاران، ۲۰۰۱)[2]) عبارتند از: «اغلب یا بیشترین[3] » $\left((a, b) = (0.3, 0.8)\right)$، «حداقل نیمی از[4] » $\left((a, b) = (0, 0.5)\right)$ و «تا جایی که ممکن است یا حتی‌الامکان[5] » $\left((a, b) = (0.5, 1)\right)$.

مثال ۳-۵ اعداد فاصله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{\alpha}_1 = [3, 5], \ \tilde{\alpha}_2 = [4, 6], \ \tilde{\alpha}_3 = [4, 7], \ \tilde{\alpha}_4 = [3, 6]$$

از معادله (۴-۲) برای مقایسه دو به دوی این اعداد فاصله‌ای $\tilde{\alpha}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ استفاده کرده و سپس ماتریس درجات امکان زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.20 & 0.40 \\ 0.75 & 0.50 & 0.40 & 0.60 \\ 0.80 & 0.60 & 0.50 & 0.80 \\ 0.60 & 0.40 & 0.20 & 0.50 \end{bmatrix}$$

که بردار اولویت آن را نیز با استفاده از معادله (۴-۶) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$v = (0.196, 0.271, 0.308, 0.225)$$

بر اساس بردار اولویت فوق، اعداد فاصله‌ای این مثال را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\tilde{b}_1 = \tilde{\alpha}_3, \ \tilde{b}_2 = \tilde{\alpha}_2, \ \tilde{b}_3 = \tilde{\alpha}_4, \ \tilde{b}_4 = \tilde{\alpha}_1$$

اگر فرض کنیم که بردار وزنی عملگر *UOWA* به شکل زیر باشد:

$$\omega = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$$

---

[1] Non-Decreasing Proportional Fuzzy Linguistic
[2] Herrera et al. (2001)
[3] most
[4] at least half
[5] as many as possible

آنگاه از عملگر $UOWA$ به منظور تلفیق اعداد فاصله‌ای $\tilde{\alpha}_i \, (i=1,\, 2,\, 3,\, 4)$ استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} UOWA_{\omega}(\tilde{\alpha}_1,\, \tilde{\alpha}_2,\, \tilde{\alpha}_3,\, \tilde{\alpha}_4) &= \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_j \\ &= 0.3\times[4,\, 7] + 0.2\times[4,\, 6] + 0.4\times[3,\, 6] + 0.1\times[3,\, 5] \\ &= [3.5,\, 6.2] \end{aligned}$$

توجه کنید که اولین عنصر وزنی عملگر، در سومین عدد فاصله‌ای ضرب شده؛ چون این عدد، بزرگترین عدد فاصله‌ای در میان این چهار عدد فاصله‌ای (یا بزرگترین نشانوند در میان نشانوندها) است. بعد از آن، عنصر وزن دوم، سوم و چهارم بترتیب در سایر اعداد فاصله‌ای دیگر از بزرگ به کوچک ضرب شده‌اند. در اینجا نیز همانند فصل اول، بزرگی یا کوچکی عناصر وزنی عملگر مدنظر نیست بلکه بزرگی و کوچکی اعداد فاصله‌ای (یا نشانوند) مورد توجه است. لذا، نهایتاً میانگین وزندار مرتب این چهار عدد فاصله‌ای برابر $[3.5,\, 6.2]$ می‌باشد.

در ادامه این مبحث، شرایطی را در نظر می‌گیریم که در آنها اطلاعات جزئی در مورد اوزان وجود دارد و تصمیم‌گیرنده نیز ترجیحات ذهنی روی نشانوندها دارد. با این مفروضات یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی برای تعیین بردار وزنی عملگر $UOWA$ معرفی می‌کنیم:

فرض کنید مسئله ما دارای m نمونه است که هر نمونه شامل n نشانوند $(\tilde{a}_{k1},\, \tilde{a}_{k2},\, ...,\, \tilde{a}_{kn})$ به ازای $k=1,\, 2,\, ...,\, m$ می‌باشد و مقدار ترجیحی ذهنی $\tilde{\vartheta}_k$ متناظر با هرکدام از این دسته نشانوندها نیز بصورت معین شده است:

$$\tilde{a}_{kj} = [a_{kj}^L,\, a_{kj}^U],\;\; \tilde{\vartheta}_k = [\vartheta_k^L,\, \vartheta_k^U] \quad j=1,\, 2,\, ...,\, n\,,\;\; k=1,\, 2,\, ...,\, m$$

توجه کنید که ترجیحات ذهنی متناظر با هر نشانوند نیستند بلکه هر ترجیح ذهنی متناظر با یک دسته از نشانوندهاست. همچنین، فرض کنید Φ' مجموعه‌ای از اطلاعات معلوم جزئی اوزان باشد.

حال باید بردار وزنی متناظر آن $\omega = (\omega_1,\, \omega_2,\, ...,\, \omega_n)$ به گونه‌ای تعیین شود که داشته باشیم:

$$g(\tilde{a}_{k1},\, \tilde{a}_{k2},\, ...,\, \tilde{a}_{kn}) = \tilde{\vartheta}_k,\;\; k=1,\, 2,\, ...,\, m \qquad (۵-۱۵)$$

می‌توانیم از فرمول درجه امکان برای مقایسه k امین دسته از نشانوندهای نمونه استفاده کرده و ماتریس درجات امکان را تشکیل دهیم. در اینصورت بردار اولویت آن را می‌توان با استفاده از فرمولی که قبلاً به آن اشاره شد محاسبه کرد. سپس، از ترتیب عناصر در بردار اولویت منتجه برای رتبه‌بندی k امین دسته از داده‌های نمونه $(\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, ..., \tilde{a}_{kn})$ به صورت نزولی استفاده کرده و نهایتاً بردار $\tilde{b}_{k1}, \tilde{b}_{k2}, ..., \tilde{b}_{kn}$ به ازای $k=1, 2, ..., m$ را بدست آوریم. بنابراین، معادله (۵–۱۵) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \tilde{b}_{kj} = \tilde{\vartheta}_k, \quad k=1, 2, ..., m \qquad (۵–۱۶)$$

به عبارتی،

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^L = \vartheta_k^L, \quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^U = \vartheta_k^U, \quad k=1, 2, ..., m \qquad (۵–۱۷)$$

با مد نظر داشتن شرایط تصمیم‌گیری در دنیای واقعی، معادله (۵–۱۷) معمولاً صادق نیست و بنابراین، فاکتورهای انحراف e_{1k} و e_{2k} را معرفی می‌کنیم به طوری که:

$$e_{1k} = \left| \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^L - \vartheta_k^L \right| \quad e_{2k} = \left| \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^U - \vartheta_k^U \right| \quad k=1, 2, ..., m$$

یک بردار وزنی معقول باید انحراف بین فاکتورهای e_{1k} و e_{2k} را تا حد ممکن کوچک سازد. بنابراین، مدل چندهدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-5.3)} \quad \begin{cases} \min\ e_{1k} = \left| \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^L - \vartheta_k^L \right|, \quad k=1, 2, ..., m \\ \min\ e_{2k} = \left| \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_{kj}^U - \vartheta_k^U \right|, \quad k=1, 2, ..., m \\ s.t. \quad \omega \in \Phi' \end{cases}$$

برای حل مدل *(M-5.3)* و با فرض اینکه فاکتورهای انحراف به طور بیطرفانه یا منصفانه بیان شده باشند، مدل فوق را به مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\textbf{(M-5.4)}\begin{cases}\min\ J=\sum_{k=1}^{m}[(e_{1k}^{+}+e_{1k}^{-})+(e_{2k}^{+}+e_{2k}^{-})]\\ s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{L}\omega_j-\vartheta_k^{L}-e_{1k}^{+}+e_{1k}^{-}=0,\qquad k=1,2,\dots,m\\ \qquad\ \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{U}\omega_j-\vartheta_k^{U}-e_{2k}^{+}+e_{2k}^{-}=0,\qquad k=1,2,\dots,m\\ \qquad\ \omega\in\Phi',\ e_{1k}^{+}\ge 0,\ e_{1k}^{-}\ge 0,\ e_{2k}^{+}\ge 0,\ e_{2k}^{-}\ge 0,\ k=1,2,\dots,m\end{cases}$$

که در مدل فوق، e_{1k}^{+} انحراف مثبت از آرمان تابع هدف $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{L}\omega_j-\vartheta_k^{L}$ یعنی بالاتر از مقدار مورد انتظار صفر؛ و e_{1k}^{-} انحراف منفی از آرمان تابع هدف $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{L}\omega_j-\vartheta_k^{L}$ یعنی پایین‌تر از مقدار مورد انتظار صفر می‌باشند؛ (هر دو انحراف مربوط به گذر از تساوی در سمت چپ اعداد فاصله ای است). همچنین، e_{2k}^{+} انحراف مثبت از هدف نهایی یا آرمان تابع هدف $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{U}\omega_j-\vartheta_k^{U}$ بالاتر از مقدار مورد انتظار صفر و نیز e_{2k}^{-}انحراف منفی از هدف نهایی یا آرمان تابع هدف $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{U}\omega_j-\vartheta_k^{U}$ پایین‌تر از مقدار مورد انتظار صفر می‌باشند؛ (این دو انحراف نیز مربوط به گذر از تساوی در سمت راست اعداد فاصله ای است). با حل مدل (*M-5.4*) می‌توان بردار وزنی ω عملگر *UOWA* را محاسبه نمود.

جدول ٦-٥ داده‌های نمونه

مقادیر ترجیحات ذهنی	دسته نشانوندها	نمونه
[0.3, 0.7]	[0.4, 0.7] [0.2, 0.5] [0.7, 0.8]	1
[0.4, 0.5]	[0.3, 0.4] [0.6, 0.8] [0.3, 0.5]	2
[0.3, 0.6]	[0.2, 0.6] [0.3, 0.4] [0.5, 0.8]	3
[0.4, 0.6]	[0.5, 0.8] [0.3, 0.5] [0.3, 0.4]	4

مثال ٤-۵ چهار نمونه داده، یعنی نمونه ۱ تا نمونه ۴ را در اختیار داریم. هر نمونه، متشکل از سه نشانوند $(\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \tilde{a}_{k3})$ بوده، و هر یک از نشانوندها دارای مقادیر فاصله‌ای می‌باشد. این مقادیر در سمت چپ جدول (۵-۶) نشان داده شده‌اند. همچنین، مقدار ترجیح ذهنی $\tilde{\vartheta}_k$ نیز در قالب اعداد فاصله‌ای برای هر دسته از نشانوندها در سمت راست جدول (۵-۶) درج شده است:

ابتدا از فرمول درجه امکان برای مقایسه زوجی عناصر درون k امین نمونه نشانوندها استفاده کرده و ماتریسهای درجات امکان $P^{(k)}(k=1, 2, 3, 4)$ را تشکیل می‌دهیم. سپس، بردارهای اولویت $v^{(k)}(k=1, 2, 3, 4)$ را با استفاده از فرمول بیان شده در این بخش، برای ماتریسهای درجه امکان بدست می‌آوریم:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.833 & 0 \\ 0.167 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \ P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.333 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 0.667 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.143 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.857 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \ P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)} = (0.305, 0.195, 0.500), \ v^{(2)} = (0.222, 0.5, 0.278)$$
$$v^{(3)} = (0.291, 0.233, 0.476), \ v^{(4)} = (0.5, 0.278, 0.222)$$

بر اساس ترتیب عناصر موجود در بردارهای اولویت، عناصر موجود در k امین نمونه از نشانوندها یعنی $\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \tilde{a}_{k3}$ را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و $\tilde{b}_{k1}, \tilde{b}_{k2}, \tilde{b}_{k3}$ را بدست می‌آوریم:

$$\tilde{b}_{11} = [0.7, 0.8], \ \tilde{b}_{12} = [0.4, 0.7], \ \tilde{b}_{13} = [0.2, 0.5]$$
$$\tilde{b}_{21} = [0.6, 0.8], \ \tilde{b}_{22} = [0.3, 0.5], \ \tilde{b}_{23} = [0.3, 0.4]$$
$$\tilde{b}_{31} = [0.5, 0.8], \ \tilde{b}_{32} = [0.2, 0.6], \ \tilde{b}_{33} = [0.3, 0.4]$$
$$\tilde{b}_{41} = [0.5, 0.8], \ \tilde{b}_{42} = [0.3, 0.5], \ \tilde{b}_{43} = [0.3, 0.4]$$

حال با استفاده از مدل (M-5.4) بردار وزنی مربوط به عملگر $UOWA$ را بدست می‌آوریم، که خواهد شد: $\omega = (0.3, 0.3, 0.4)$. نهایتاً، با استفاده از این بردار وزنی داریم:

$$UOWA_{\omega}(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{13}) = 0.3 \times \tilde{b}_{11} + 0.3 \times \tilde{b}_{12} + 0.4 \times \tilde{b}_{13} = [0.41, 0.65]$$

$$UOWA_{\omega}(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}) = 0.3 \times \tilde{b}_{21} + 0.3 \times \tilde{b}_{22} + 0.4 \times \tilde{b}_{23} = [0.39, 0.55]$$

$$UOWA_{\omega}(\tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{33}) = 0.3 \times \tilde{b}_{31} + 0.3 \times \tilde{b}_{32} + 0.4 \times \tilde{b}_{33} = [0.32, 0.60]$$

$$UOWA_{\omega}(\tilde{a}_{41}, \tilde{a}_{42}, \tilde{a}_{43}) = 0.3 \times \tilde{b}_{41} + 0.3 \times \tilde{b}_{42} + 0.4 \times \tilde{b}_{43} = [0.36, 0.57]$$

(اگر مقادیر داخل جدول (۵-۶) را عملکرد جزیی گزینه‌ها بدانیم با این تکنیک توانسته‌ایم به عملکرد کلی گزینه‌ها دست پیدا کنیم.)

٥-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *UOWA*

٥-٤-١ تصمیم‌گیری چندشاخصه بدون ترجیحات روی گزینه‌ها

حال روشی برای حل مسائل $MADM$ معرفی می‌کنیم که در آنها تصمیم‌گیرنده هیچ ترجیحی روی گزینه‌ها ندارد. برای حل مسائلی از این دست باید گامهای زیر را طی کرد:

گام ۱) یک مسئله $MADM$ که در آن ماتریس تصمیم غیرقطعی و ماتریس نرمال متناظر آن به ترتیب $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times m}$ و $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times m}$ هستند را در نظر بگیرید که در آنها $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ و $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^U]$ به ازاء هر i و j می‌باشند.

گام ۲) با استفاده از معادله (۴-۲)، مقادیر شاخصه‌های $\tilde{r}_{ij}\,(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ را به صورت دو به دو مقایسه کنید و ماتریس درجه امکان $P^{(i)}$ را تشکیل دهید. از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_m^{(i)})$ استفاده کنید، سپس مقادیر شاخصه‌های $\tilde{r}_{ij}\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ را

برای هر گزینه x_i بر اساس اوزان $v_j^{(i)}\,(j=1,2,\ldots,m)$ رتبه‌بندی کنید و نشانوندهای مرتب شده $\tilde{b}_{i1},\tilde{b}_{i2},\ldots,\tilde{b}_{im}$ را بدست آورید.

گام ۳) از عملگر *UOWA* به منظور تلفیق مقادیر شاخصه‌های مرتب شده گزینه‌های x_i استفاده کرده و مقادیر کلی شاخصه‌ها را بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\omega)=UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{i1},\tilde{r}_{i2},\ldots,\tilde{r}_{im})=\sum_{j=1}^{m}\omega_j\tilde{b}_{ij}\quad i=1,2,\ldots,n$$

که بردار وزنی آن $\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m)$ نیز می‌تواند با استفاده از معادلات (۵-۱۴) و (۵-۱۳) یا روش ارائه شده در بخش (۱-۱) بدست آید.

گام ٤) درجات امکان $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\omega)\ge\tilde{z}_j(\omega)),\,(i,\ j=1,2,\ldots,n)$ حاصل از مقایسه مقادیر کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه را با استفاده از معادله (۴-۲) محاسبه کنید و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) بردار اولویت $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ ماتریس $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست آورید و گزینه‌ها را بر اساس عناصر v رتبه‌بندی نمائید.

۵-٤-۲ مثال کاربردی

مثال ۵-۵ مقامات محلی در استانی، از چند سال قبل، بر اساس منابع طبیعی آن استان، اقدام به سرمایه‌گذاری بر روی چند پروژه کرده‌اند. حالا، بعد از سپری شدن زمان و عملیاتی شدن آن پروژه‌ها، مسئولان استان مایل به تصمیم‌گیری در مورد یک پروژه سرمایه‌گذاری جدید هستند. پنج گزینه برای این منظور وجود دارد (لیو و هوانگ، ۲۰۰۰)[1] که عبارتند از: (۱) x_1: کارخانه تولید آبمیوه، (۲) x_2: احداث

[1] Liu and Huang (2000b)

مرغداری، (۳) x_3 : احداث گلخانه، (۴) x_4 : تولید نوشابه و (۵) x_5 : فرآوری و بسته‌بندی چای. چهار شاخصه برای ارزیابی این پروژه‌های سرمایه‌گذاری در این مسئله وجود دارند: (۱) u_1: حجم سرمایه‌گذاری، (۲) u_2 : میزان سود خالص مورد انتظار، (۳) u_3: میزان سود حاصل از ریسک و (۴) u_4: میزان زیان ناشی از ریسک. اطلاعات تصمیم در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ قرار دارند. این ماتریس در جدول (۵–۷) لیست شده است:

جدول ۵-۷ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[5, 7]	[4, 5]	[4, 6]	[0.4, 0.6]
x_2	[10, 11]	[6, 7]	[5, 6]	[1.5, 2]
x_3	[5, 6]	[4, 5]	[3, 4]	[0.4, 0.7]
x_4	[9, 11]	[5, 6]	[5, 7]	[1.3, 1.5]
x_5	[6, 8]	[3, 5]	[3, 4]	[0.8, 1]

در میان شاخصه‌ها، u_2 و u_3 از جنس سود و u_1 و u_4 از جنس هزینه هستند. همچنین، اطلاعات وزن شاخصه‌ها نیز کاملاً نامعلوم است. اکنون از روش معرفی شده در بخش (۵–۴–۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم که شامل گامهای زیر می‌باشد:

گام ۱) از معادلات (۴–۹) و (۴–۱۰) برای نرمال کردن ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ و درنتیجه تبدیل آن به ماتریس $\tilde{R}$ استفاده می‌کنیم که در جدول (۵–۸) نشان داده است:

جدول ۵-۸ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.40, 0.71]	[0.32, 0.50]	[0.32, 0.65]	[0.43, 0.98]
x_2	[0.25, 0.35]	[0.47, 0.69]	[0.40, 0.65]	[0.13, 0.26]
x_3	[0.46, 0.71]	[0.32, 0.50]	[0.24, 0.44]	[0.37, 0.98]
x_4	[0.25, 0.39]	[0.40, 0.59]	[0.40, 0.76]	[0.17, 0.30]
x_5	[0.35, 0.59]	[0.24, 0.50]	[0.24, 0.44]	[0.26, 0.49]

گام ۲) از معادله (۴-۲) برای مقایسه گزینه‌ها بر اساس هر شاخصه استفاده می‌کنیم و ماتریسهای درجه امکان $P^{(i)}(i=1, 2, 3, 4, 5)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.50 & 0.76 & 0.61 & 0.33 \\ 0.24 & 0.50 & 0.35 & 0.10 \\ 0.39 & 0.65 & 0.50 & 0.25 \\ 0.67 & 0.90 & 0.75 & 0.50 \end{pmatrix},\ P^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.96 \\ 1 & 0.50 & 0.62 & 1 \\ 1 & 0.38 & 0.50 & 1 \\ 0.04 & 0 & 0 & 0.50 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.50 & 0.91 & 1 & 0.40 \\ 0.09 & 0.50 & 0.68 & 0.16 \\ 0 & 0.32 & 0.50 & 0.09 \\ 0.60 & 0.84 & 0.91 & 0.50 \end{pmatrix},\ P^{(4)}=\begin{pmatrix} 0.50 & 0 & 0 & 0.81 \\ 1 & 0.50 & 0.35 & 1 \\ 1 & 0.65 & 0.50 & 1 \\ 0.19 & 0 & 0 & 0.50 \end{pmatrix},$$

$$P^{(5)}=\begin{pmatrix} 0.50 & 0.70 & 0.80 & 0.70 \\ 0.30 & 0.50 & 0.57 & 0.49 \\ 0.20 & 0.43 & 0.50 & 0.42 \\ 0.30 & 0.51 & 0.58 & 0.50 \end{pmatrix}$$

معادله (۴-۶) را برای استخراج بردار اولویت $v^{(i)}=(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)})\ (i=1, 2, 3, 4, 5)$ از روی ماتریسهای درجه امکان $P^{(i)}$ به کار می‌گیریم:

$$v^{(1)}=(0.267, 0.182, 0.233, 0.318),\ v^{(2)}=(0.205, 0.343, 0.323, 0.128)$$
$$v^{(3)}=(0.318, 0.202, 0.159, 0.321),\ v^{(4)}=(0.193, 0.321, 0.346, 0.141)$$
$$v^{(5)}=(0.308, 0.238, 0.212, 0.241)$$

گام ۳) مقادیر شاخصه‌های هر گزینه x_i را مطابق عناصر $v^{(i)}=(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)})$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم و $\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, \tilde{b}_{i3}, \tilde{b}_{i4}(i=1, 2, 3, 4, 5)$ را بدست می‌آوریم:

$$\tilde{b}_{11}=[0.43, 0.98],\ \tilde{b}_{12}=[0.40, 0.71],\ \tilde{b}_{13}=[0.32, 0.65],\ \tilde{b}_{14}=[0.32, 0.50]$$
$$\tilde{b}_{21}=[0.47, 0.69],\ \tilde{b}_{22}=[0.40, 0.65],\ \tilde{b}_{23}=[0.25, 0.35],\ \tilde{b}_{24}=[0.13, 0.26]$$
$$\tilde{b}_{31}=[0.37, 0.98],\ \tilde{b}_{32}=[0.46, 0.71],\ \tilde{b}_{33}=[0.32, 0.50],\ \tilde{b}_{34}=[0.24, 0.44]$$
$$\tilde{b}_{41}=[0.40, 0.76],\ \tilde{b}_{42}=[0.40, 0.59],\ \tilde{b}_{43}=[0.25, 0.39],\ \tilde{b}_{44}=[0.17, 0.30]$$

$$\tilde{b}_{51} = [0.35, 0.596], \ \tilde{b}_{52} = [0.29, 0.49], \ \tilde{b}_{53} = [0.24, 0.50], \ \tilde{b}_{54} = [0.24, 0.44]$$

گام ٤) بردار وزنی را با استفاده از روش ارائه شده در قضیه (۱−۱۰) محاسبه می‌کنیم ($\alpha = 0.2$ در نظر گرفته می‌شود):

$$\omega = (0.4, 0.2, 0.2, 0.2)$$

و از عملگر $UOWA$ به منظور تلفیق اطلاعات شاخصه‌ها برای هر گزینه و محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\omega)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(\omega) = UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{14}) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_{1j} = [0.380, 0.764]$$

$$\tilde{z}_2(\omega) = UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{21}, \tilde{r}_{22}, \tilde{r}_{23}, \tilde{r}_{24}) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_{2j} = [0.344, 0.528]$$

$$\tilde{z}_3(\omega) = UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{31}, \tilde{r}_{32}, \tilde{r}_{33}, \tilde{r}_{34}) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_{3j} = [0.352, 0.722]$$

$$\tilde{z}_4(\omega) = UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{41}, \tilde{r}_{42}, \tilde{r}_{43}, \tilde{r}_{44}) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_{4j} = [0.324, 0.560]$$

$$\tilde{z}_5(\omega) = UOWA_{\omega}(\tilde{r}_{51}, \tilde{r}_{52}, \tilde{r}_{53}, \tilde{r}_{54}) = \sum_{j=1}^{4} \omega_j \tilde{b}_{5j} = [0.288, 0.522]$$

گام ٥) از معادله (۴−۲) برای مقایسه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\omega)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ استفاده کرده و ماتریس درجات امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.739 & 0.546 & 0.710 & 0.770 \\ 0.261 & 0.5 & 0.318 & 0.486 & 0.574 \\ 0.454 & 0.680 & 0.5 & 0.657 & 0.719 \\ 0.290 & 0.514 & 0.343 & 0.5 & 0.579 \\ 0.230 & 0.426 & 0.281 & 0.421 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ٦) بردار اولویت ماتریس P را با استفاده از معادله (۴−۶) بدست می‌آوریم:

$$v = (0.238, 0.182, 0.226, 0.186, 0.168)$$

بر اساس بردار اولویت v و ماتریس درجه امکان P، رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(\omega)(i=1, 2, 3, 4, 5)$ را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(\omega) \underset{0.546}{\geq} \tilde{z}_3(\omega) \underset{0.657}{\geq} \tilde{z}_4(\omega) \underset{0.514}{\geq} \tilde{z}_2(\omega) \underset{0.574}{\geq} \tilde{z}_5(\omega)$$

گام ۷) گزینه‌های $x_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ را بر اساس مقادیر $\tilde{z}_i(\omega)(i=1, 2, 3, 4, 5)$ به دست آمده در گام قبل مرتب می‌کنیم:

$$x_1 \underset{0.546}{\succ} x_3 \underset{0.657}{\succ} x_4 \underset{0.514}{\succ} x_2 \underset{0.574}{\succ} x_5$$

همانطور که مشخص است بهترین گزینه، x_1 می‌باشد.

۵-٤-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه با وجود اطلاعات ترجیحات روی گزینه‌ها

در ادامه، به معرفی یک روش *MADM* می‌پردازیم که در آن تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌ها دارای ترجیح است:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، که ماتریس تصمیم غیرقطعی و فرم نرمال آن به ترتیب برابر $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ و $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ هستند، فرض کنید تصمیم‌گیرنده ترجیحاتی روی گزینه‌ها دارد و مقادیر ترجیحات نیز در قالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{\vartheta}_i=[\tilde{\vartheta}_i^L, \tilde{\vartheta}_i^U]$ بیان می‌شوند که در آن $i=1, 2, ..., n$ $0\leq \tilde{\vartheta}_i^L \leq \tilde{\vartheta}_i^U \leq 1,$ می‌باشد.

گام ۲) از معادله (۴-۲) برای مقایسه مقادیر شاخصه‌های $\tilde{r}_{ij}(j=1, 2, ..., n)$ روی گزینه‌ها استفاده کنید و ماتریس درجه امکان $P^{(i)}$ را تشکیل دهید. سپس از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v^{(i)}=(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)})$ ماتریس $P^{(i)}$ استفاده کنید. مقادیر شاخصه‌های هر گزینه را طبق عناصر $v^{(i)}$ به صورت نزولی مرتب کرده و آنها را $\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, ..., \tilde{b}_{im}$ بنامید.

گام ۳) از عملگر *UOWA* برای تجمیع و تلفیق مقادیر شاخصه‌های گزینه‌های مرتب شده استفاده کنید و مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\omega)$ را به صورت زیر بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, ..., \tilde{r}_{im}) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \tilde{b}_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

که بردار وزنی $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ در عبارت فوق می‌تواند از طریق مدل (*M-5.4*) بدست آید.

گام ٤) معادله (۴-۲) را برای محاسبه درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\omega) \geq \tilde{z}_j(\omega))$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ بکار گیرید و ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس $P = (p_{ij})_{n\times n}$ استفاده کنید و گزینه‌ها را بر اساس عناصر بردار اولویت بدست آمده برای حصول بهترین گزینه مرتب کنید.

٤-٤-٥ مثال کاربردی

مثال ٦-٥ اکنون روش ارائه شده در بخش (۵-۴-۳) را با مثال (۵-۲) حل می‌کنیم:

گام ۱) به گام اول در بخش (۵-۲-۲) مراجعه کنید.

گام ۲) شاخصه‌های $\tilde{r}_{ij}\,(j = 1, 2, ..., 6)$ مربوط به هر گزینه را به صورت دو به دو با استفاده از معادله (۴-۲) مقایسه کنید و ماتریس درجه امکان $P^{(i)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.208 & 0.121 & 0 & 0.224 & 0 \\ 0.792 & 0.5 & 0.356 & 0.156 & 0.556 & 0.023 \\ 0.879 & 0.644 & 0.5 & 0.320 & 0.707 & 0.204 \\ 1 & 0.844 & 0.680 & 0.5 & 0.927 & 0.388 \\ 0.776 & 0.444 & 0.293 & 0.073 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.977 & 0.796 & 0.612 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.714 & 0.625 & 0.625 & 0.290 & 0.583 \\ 0.286 & 0.5 & 0.381 & 0.381 & 0 & 0.348 \\ 0.375 & 0.619 & 0.5 & 0.5 & 0.083 & 0.457 \\ 0.375 & 0.619 & 0.5 & 0.5 & 0.083 & 0.457 \\ 0.710 & 1 & 0.917 & 0.917 & 0.5 & 0.846 \\ 0.417 & 0.652 & 0.543 & 0.543 & 0.154 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.977 & 0.240 & 0.240 & 0.694 & 0.293 \\ 0.023 & 0.5 & 0 & 0 & 0.233 & 0 \\ 0.760 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.959 & 0.610 \\ 0.760 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.959 & 0.610 \\ 0.306 & 0.767 & 0.041 & 0.041 & 0.5 & 0.050 \\ 0.707 & 1 & 0.390 & 0.390 & 0.950 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.444 & 0.341 & 0.227 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.977 & 0.864 & 0.444 \\ 0.556 & 0 & 0.5 & 0.408 & 0.306 & 0 \\ 0.659 & 0.023 & 0.592 & 0.5 & 0.396 & 0 \\ 0.773 & 0.136 & 0.694 & 0.604 & 0.5 & 0.050 \\ 1 & 0.556 & 1 & 1 & 0.950 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(5)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.211 & 0.211 & 0.079 & 0.211 & 0.811 \\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1 \\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1 \\ 0.921 & 0.708 & 0.708 & 0.5 & 0.708 & 1 \\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1 \\ 0.189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۳) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v^{(i)}=(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)}, v_4^{(i)})$ ماتریس $P^{(i)}$ استفاده می‌کنیم:

$$v^{(1)}=(0.128, 0.194, 0.238, 0.292, 0.179, 0.319)$$
$$v^{(2)}=(0.242, 0.170, 0.202, 0.202, 0.320, 0.215)$$
$$v^{(3)}=(0.222, 0.113, 0.291, 0.291, 0.160, 0.272)$$
$$v^{(4)}=(0.151, 0.314, 0.164, 0.183, 0.213, 0.325)$$
$$v^{(5)}=(0.176, 0.254, 0.254, 0.302, 0.254, 0.109)$$

سپس مقادیر شاخصه‌های گزینه‌ها را بر اساس عناصر $v^{(i)}$ مرتب می‌کنیم و مقادیر $\tilde{b}_{i1}, \tilde{b}_{i2}, ..., \tilde{b}_{i6}$ که در آن $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ می باشد، حاصل می‌شوند:

$$\tilde{b}_{11}=[0.415, 0.437],\ \tilde{b}_{12}=[0.407, 0.432],\ \tilde{b}_{13}=[0.398, 0.423]$$
$$\tilde{b}_{14}=[0.394, 0.414],\ \tilde{b}_{15}=[0.394, 0.410],\ \tilde{b}_{16}=[0.372, 0.405]$$
$$\tilde{b}_{21}=[0.411, 0.438],\ \tilde{b}_{22}=[0.394, 0.429],\ \tilde{b}_{23}=[0.394, 0.419]$$
$$\tilde{b}_{24}=\tilde{b}_{25}=[0.394, 0.415],\quad \tilde{b}_{26}=[0.389, 0.410]$$
$$\tilde{b}_{31}=\tilde{b}_{32}=[0.408, 0.433],\ \tilde{b}_{33}=[0.408, 0.424]$$
$$\tilde{b}_{34}=[0.395, 0.420],\ \tilde{b}_{35}=[0.386, 0.410],\ \tilde{b}_{36}=[0.377, 0.396]$$
$$\tilde{b}_{41}=[0.417, 0.433],\ \tilde{b}_{42}=[0.413, 0.433],\ \tilde{b}_{43}=[0.395, 0.419]$$
$$\tilde{b}_{44}=[0.390, 0.414],\ \tilde{b}_{45}=[0.385, 0.410],\ \tilde{b}_{46}=[0.385, 0.405]$$
$$\tilde{b}_{51}=[0.407, 0.419],\ \tilde{b}_{52}=\tilde{b}_{53}=\tilde{b}_{54}=[0.402, 0.414]$$
$$\tilde{b}_{55}=[0.384, 0.410],\ \tilde{b}_{56}=[0.380, 0.391]$$

گام ٤) اگر فرض کنیم که اطلاعات وزنی جزئی معلوم عملگر *UOWA* به شکل زیر باشد:

$$\Phi'=\Big\{\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6)\,|\,0.1\le\omega_1\le 0.2,\quad 0.5\le\omega_2\le 0.3,\ \ 0.15\le\omega_3\le 0.2,$$
$$0.2\le\omega_4\le 0.25,\ 0.1\le\omega_5\le 0.3,\ 0.2\le\omega_6\le 0.4,\ \sum_{j=1}^{6}\omega_j=1\Big\}$$

و نیز تصمیم‌گیرنده مقادیر ترجیحات خود روی گزینه‌ها را به شکل اعداد فاصله‌ای به صورت زیر بیان کرده باشد:

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.3, 0.5],\ \tilde{\vartheta}_2=[0.5, 0.6],\ \tilde{\vartheta}_3=[0.3, 0.4],\ \tilde{\vartheta}_4=[0.4, 0.6],\ \tilde{\vartheta}_5=[0.4, 0.5]$$

آنگاه از مدل (*M-5.4*) برای استخراج بردار وزنی مربوط به عملگر *UOWA* استفاده می‌کنیم:

$$\omega = (0.2, 0.15, 0.15, 0.2, 0.1, 0.2)$$

گام ۵) مقادیر شاخصه‌های هر گزینه‌ها را با استفاده از عملگر *UOWA* تلفیق می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\tilde{z}_1(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{14}, \tilde{r}_{15}, \tilde{r}_{16}) = \sum_{j=1}^{6} \omega_j \tilde{b}_{1j} = [0.3964, 0.4205]$$
$$\tilde{z}_2(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{21}, \tilde{r}_{22}, \tilde{r}_{23}, \tilde{r}_{24}, \tilde{r}_{25}, \tilde{r}_{26}) = \sum_{j=1}^{6} \omega_j \tilde{b}_{2j} = [0.3964, 0.4213]$$
$$\tilde{z}_3(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{31}, \tilde{r}_{32}, \tilde{r}_{33}, \tilde{r}_{34}, \tilde{r}_{35}, \tilde{r}_{36}) = \sum_{j=1}^{6} \omega_j \tilde{b}_{3j} = [0.3970, 0.4194]$$
$$\tilde{z}_4(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{41}, \tilde{r}_{42}, \tilde{r}_{43}, \tilde{r}_{44}, \tilde{r}_{45}, \tilde{r}_{46}) = \sum_{j=1}^{6} \omega_j \tilde{b}_{4j} = [0.3981, 0.4192]$$
$$\tilde{z}_5(\omega) = UOWA_\omega(\tilde{r}_{51}, \tilde{r}_{52}, \tilde{r}_{53}, \tilde{r}_{54}, \tilde{r}_{55}, \tilde{r}_{56}) = \sum_{j=1}^{6} \omega_j \tilde{b}_{5j} = [0.3968, 0.4100]$$

گام ٦) از معادله (۴-۲) برای مقایسه $\tilde{z}_j(\omega)(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ به صورت دو به دو استفاده می‌کنیم و ماتریس درجه امکان را بدست می‌آوریم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4918 & 0.5054 & 0.4956 & 0.6354 \\ 0.5082 & 0.5 & 0.5137 & 0.5043 & 0.6430 \\ 0.4946 & 0.4863 & 0.5 & 0.4897 & 0.6348 \\ 0.5044 & 0.4957 & 0.5103 & 0.5 & 0.6531 \\ 0.3646 & 0.3570 & 0.3652 & 0.3469 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۷) بردار اولویت ماتریس P را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست می‌آوریم:

$$v = (0.2064, 0.2085, 02.53, 0.2082, 0.1717)$$

بر اساس درجات امکان موجود در ماتریس P، رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(\omega)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ را به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\tilde{z}_2(\omega) \underset{0.5043}{\geq} \tilde{z}_4(\omega) \underset{0.5044}{\geq} \tilde{z}_1(\omega) \underset{0.5054}{\geq} \tilde{z}_3(\omega) \underset{0.6348}{\geq} \tilde{z}_5(\omega)$$

گام ۸) گزینه‌ها را بر اساس مقادیر $\tilde{z}_i(w)(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ به شکل زیر مرتب می‌کنیم:

$$x_2 \underset{0.5043}{\succ} x_4 \underset{0.5044}{\succ} x_1 \underset{0.5054}{\succ} x_3 \underset{0.6348}{\succ} x_5$$

مشخص است که گزینه دوم بهترین گزینه موجود در این مسئله است.

۵-۵ مدل بیشینه‌سازی وفاق به‌منظور تعیین وزن شاخصه‌ها در *MAGDM* غیرقطعی[۱]

۵-۵-۱ مدل بیشینه‌سازی وفاق تحت شرایط عدم قطعیت

در یک مسئله *MAGDM*، تصمیم‌گیرندگان $d_k (k=1, 2, ..., t)$ وظیفه ارزیابی گزینه‌های $x_i (i=1, 2, ..., n)$ را با توجه به شاخصه‌های $u_j (j=1, 2, ..., m)$ بعهده داشته و ماتریسهای تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_k = (\tilde{a}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ $\left(k=1, 2, ..., t\right)$ را تشکیل می‌دهند که در آن $\tilde{a}_{ij}^{(k)} =[a_{ij}^{L(k)}, a_{ij}^{U(k)}]$ ها ($i=1, 2, ..., n,\ j=1, 2, ..., m,\ k=1, 2, ..., t$) اعداد فاصله‌ای هستند. به منظور بی‌مقیاس‌سازی واحدها و تبدیل ماتریسهای تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_k = (\tilde{a}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ به ماتریسهای نرمال $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ از فرمولهای زیر استفاده می‌کنیم:

برای شاخصه‌های u_j از جنس سود:

$$\tilde{r}_{ij}^{(k)} =\left[r_{ij}^{L(k)},\ r_{ij}^{U(k)} \right]=\frac{\tilde{a}_{ij}^{(k)}}{\max\limits_i\{a_{ij}^{U(k)}\}}=\left[\frac{a_{ij}^{L(k)}}{\max\limits_i\{a_{ij}^{U(k)}\}},\ \frac{a_{ij}^{U(k)}}{\max\limits_i\{a_{ij}^{U(k)}\}}\right] \qquad (۵-۱۸)$$

برای شاخصه‌های u_j از جنس هزینه:

$$\tilde{r}_{ij}^{(k)} =\left[r_{ij}^{L(k)},\ r_{ij}^{U(k)} \right]=\frac{\min\limits_i\{a_{ij}^{L(k)}\}}{\tilde{a}_{ij}^{(k)}}=\left[\frac{\min\limits_i\{a_{ij}^{L(k)}\}}{a_{ij}^{U(k)}},\ \frac{\min\limits_i\{a_{ij}^{L(k)}\}}{a_{ij}^{L(k)}}\right] \qquad (۵-۱۹)$$

---

[1] Xu (2011a)

بر اساس ماتریسهای تصمیم نرمال هر تصمیم‌گیرنده $(k=1, 2, ..., t)$ $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ و قوانین عملیاتی مربوط به اعداد فاصله‌ای، ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را با استفاده از عملگر UWA (۱۵-۴) بدست می‌آوریم.

حال در مورد رابطه بین نظر هر فرد و نظر گروه بحث می‌کنیم. اگر برای هر $k=1, 2, ..., t$، داشته باشیم $R_k=R$ آنگاه گروه دارای تصمیم کاملاً متفق بوده و اصطلاحا به اجماع رسیده است. به عبارتی:

$$\tilde{r}_{ij}^{(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k\tilde{r}_{ij}^{(k)} \quad k=1, 2, ..., t,\ \ i=1, 2, ..., n,\ \ j=1, 2, ..., m \qquad (۵\text{-}۲۰)$$

که فرم وزن‌دار آن به صورت زیر است:

$$w_j\tilde{r}_{ij}^{(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k w_j\tilde{r}_{ij}^{(k)} \quad i=1, 2, ..., m,\ \ j=1, 2, ..., n,\ \ k=1, 2, ..., t \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

که فرمول فوق می‌تواند به صورت دقیق‌تر به شکل زیر بیان شود:

$$w_j r_{ij}^{L(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k w_j r_{ij}^{L(k)},\ \ w_j r_{ij}^{U(k)}=\sum_{k=1}^{t}\lambda_k w_j r_{ij}^{U(k)}$$
$$\text{for all } k=1, 2, ..., t,\ \ i=1, 2, ..., m,\ \ j=1, 2, ..., n \qquad (۵\text{-}۲۲)$$

معادله (۵-۲۲) یک شرط بسیار سخت‌گیرانه است و در شرایط دنیای واقعی در حالت کلی ارضاء نمی‌شود. در نتیجه، به معرفی یک متغیر انحراف می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}\tilde{e}_{ij}^{(k)}&=\left(w_j r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k w_j r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(w_j r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k w_j r_{ij}^{U(k)}\right)^2\\&=\left(\left(r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right)^2\right)w_j^2\end{aligned}$$
$$\text{for all } k=1, 2, ..., t,\ \ i=1, 2, ..., m,\ j=1, 2, ..., n \qquad (۵\text{-}۲۳)$$

و تابع انحراف زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\tilde{f}(w)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\tilde{e}_{ij}^{(k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right)^2\right)w_j^2 \qquad (۵-۲۴)$$

به منظور بیشینه‌سازی وفاق، مدل برنامه‌ریزی درجه دو زیر را تشکیل می‌دهیم (ژوو، (۲۰۱۱)[1]):

(M-5.5)
$$\tilde{f}(w^*)=\min\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\left(r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right)^2\right)w_j^2$$

$$s.\ t.\ \ w_j\geq 0,\ \ j=1,2,\dots,m,\ \ \sum_{j=1}^{m}w_j=1$$

جواب دقیق این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w_j^*=\frac{\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{m}\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right)^2\right)}}}{\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right)^2+\left(r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right)^2\right)},$$

$$j=1,2,\dots,m \qquad (۵-۲۵)$$

در حالت خاص اگر مخرج معادله (۵–۲۵) برابر صفر باشد، آنگاه معادله (۵–۲۰) صادق است. یعنی گروه اتفاق نظر داشته و در وفاق کامل قرار دارد. در این حالت، ما تمامی شاخصه‌ها را الزام کرده‌ایم که وزن یکسانی داشته باشند.

اگر تصمیم‌گیرندگان بتوانند مقداری اطلاعات در مورد وزن شاخصه‌ها که در بخش (۳–۱) بیان شد ارائه دهند آنگاه مدل (*M-5.5*) را به شکل زیر تعمیم می‌دهیم (ژوو، (۲۰۱۱)):

$$\bar{\tilde{f}}(w^*)=\min\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\left|r_{ij}^{L(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{L(k)}\right|^{\rho}+\left|r_{ij}^{U(k)}-\sum_{k=1}^{t}\lambda_k r_{ij}^{U(k)}\right|^{\rho}\right)w_j^{\rho},\ \rho>0$$

(M-5.6) $$s.\ t.\ \ w=(w_1,w_2,\dots,w_m)^T\in\Phi$$

---

[1] Xu (2011a)

$$w_j \geq 0, \quad j=1, 2, ..., m, \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1$$

با استفاده از نرم افزار *MATLAB* می‌توانیم مدل *(M-5.6)* را به منظور استخراج بردار وزن بهینه $w^* = (w_1^*, w_2^*, ..., w_m^*)$ و با لحاظ کردن پارامتر ρ حل کنیم.

بر اساس ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ و بردار بهینه اوزان شاخصه‌های $j=1, 2, ..., m \quad w_j^*$، مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w^*)$ برای گزینه‌ها (یا عملکرد کلی گزینه‌ها) را با استفاده از عملگر *UWA* (۱۵-۴) بدست می‌آوریم.

با در نظر گرفتن این امر که مقادیر کلی شاخصه‌های $(i=1, 2, ..., n)$ $\tilde{z}_i(w^*)$ مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای هستند، به منظور رتبه‌بندی آنها، هر زوج از $(i=1, 2, ..., n)$ $\tilde{z}_i(w^*)$ ها را به صورت دو به دو با استفاده از فرمول درجه امکان (۲-۴) مقایسه می‌کنیم و رابطه ترجیح فازی $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل می‌دهیم که در آن $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w^*) \geq \tilde{z}_j(w^*))$، بوده و $p_{ij} \geq 0$، $p_{ij} + p_{ji} = 1$ و $p_{ii} = 0.5$ به ازاء $i, j=1, 2, ..., n$ می‌باشد.

با جمع تمام عناصر هر سطر از P خواهیم داشت (ژوو و دا، (۲۰۰۲)[1]):

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \quad i=1, 2, ..., n \tag{۵-۲۶}$$

و گزینه‌ها را مطابق با مقادیر p_i $(i=1,2,...,n)$ رتبه‌بندی کرده و بهترین گزینه را انتخاب می‌کنیم. همچنین، می‌توانیم از فرمول (۶-۴) به منظور استخراج بردار اوزان اولویت v_i $(i=1,2,...,n)$ از رابطه ترجیح فازی P استفاده کنیم که در آن $v_i \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{n} v_j = 1$ به ازای $j=1, 2, ..., n$ می‌باشد.

به علاوه، در برخی تحقیقات (چیکلانا و همکاران، (۲۰۰۱)[2])، با استفاده از عملگر *OWA* (۱-۱) و مفهوم اکثریت فازی[3]، دو نوع درجه انتخاب گزینه‌ها را بر روی رابطه ترجیح فازی P اعمال کرده اند تا میزان یا

---

[1] Xu and Da (2002)
[2] Chiclana et al. (2001)
[3] Fuzzy Majority

شدت غلبه یک گزینه بر گزینه‌های دیگر را در قالب مفهوم اکثریت فازی بیان کنند. این دو نوع درجه عبارت بودند از: درجه کمّی‌ساز غالب یا چیره[1] و درجه کمّی‌ساز ناغالب یا ناچیره[2].

واضح است که رتبه‌بندی‌های بدست آمده از معادلات (۴-۶) و (۵-۲۶) برای گزینه‌ها همواره مانند یکدیگر است. در مورد معادله اول می‌توان گفت که معادله اول ساده‌تر و سرراست‌تر از معادله دوم است. اما معادله دوم نه‌تنها می‌تواند گزینه‌ها را رتبه‌بندی کند، بلکه می‌تواند اوزان اهمیت آنها را نیز تعیین کند. این در حالی است که روش درجات انتخاب کمّی‌ساز (چیکلانا و همکاران، (۲۰۰۱))، می‌تواند موقعیتهای رتبه‌بندی شده نشانوندها را در نظر گرفته و از اکثریت (و نه همه) نشانوندها برای استخراج رتبه گزینه‌ها استفاده کند، که این امر ممکن است منجر به از دست رفتن اطلاعات تصمیم در فرآیند تلفیق شود. بعنوان جمع‌بندی و با توجه با تحلیلهای فوق، می‌توان گفت که معادله (۵-۲۶)، بهترین ابزار برای رتبه‌بندی گزینه‌ها است. این فرمول برای مثالی که در ادامه شاهد آن خواهید بود مورد استفاده قرار می‌گیرد:

جدول ۹-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[26000, 26500]	[2, 3]	[19000, 20000]	[0.7, 0.8]	[14000, 15000]
x_2	[65000, 70000]	[3, 4]	[15000, 16000]	[0.2, 0.3]	[26000, 28000]
x_3	[50000, 55000]	[2, 4]	[16000, 17000]	[0.7, 0.9]	[24000, 25000]
x_4	[40000, 45000]	[1, 2]	[26000, 28000]	[0.5, 0.6]	[14000, 16000]

جدول ۱۰-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[27000, 28000]	[4, 5]	[18000, 20000]	[0.7, 0.9]	[16000, 17000]
x_2	[60000, 70000]	[2, 4]	[16000, 18000]	[0.3, 0.5]	[26000, 27000]
x_3	[55000, 60000]	[1, 3]	[14000, 16000]	[0.7, 1.0]	[24000, 26000]
x_4	[40000, 45000]	[2, 3]	[28000, 30000]	[0.4, 0.5]	[15000, 17000]

[1] Quantifier-Guided Dominance Degree
[2] Quantifier-Guided Non-Dominance Degree

۵-۵-۲ مثال کاربردی

مثال ۷-۵ (ژوو، (۲۰۱۱)[۱]) مثال ارائه شده در بخش (۱-۸-۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید خبرگان موجود در این مثال، ترجیحات خود را با استفاده از اعداد فاصله‌ای بیان می‌کنند. از مدل بهینه‌سازی توسعه یافته بخش (۵-۵-۱) می‌توان برای استخراج اوزان شاخصه‌ها استفاده کرد و سپس بهترین گزینه را انتخاب نمود. فرض کنید خبرگان گزینه‌ها را با توجه به شاخصه‌ها ارزیابی می‌کنند و ماتریسهای تصمیم غیرقطعی را تشکیل می‌دهند. عناصر این ماتریسها در جداول (۵-۹) تا (۵-۱۱) فهرست شده‌اند:

جدول ۱۱-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[27000, 29000]	[3, 4]	[20000, 22000]	[0.6, 0.8]	[17000, 18000]
x_2	[60000, 80000]	[4, 5]	[17000, 18000]	[0.4, 0.5]	[26000, 26500]
x_3	[40000, 60000]	[2, 5]	[15000, 17000]	[0.8, 0.9]	[26000, 27000]
x_4	[50000, 55000]	[2, 3]	[29000, 30000]	[0.4, 0.7]	[17000, 19000]

سپس با استفاده از معادلات (۵-۱۸) و (۵-۱۹) ماتریسهای تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}_k=(\tilde{a}_{ij}^{(k)})_{4\times5}\ (k=1,2,3)$ را نرمال می‌کنیم و به ماتریسهای نرمال شده $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{4\times5}\ (k=1,2,3)$ می‌رسیم که در جداول (۵-۱۲) تا (۵-۱۴) فهرست شده‌اند:

جدول ۱۲-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.37, 0.38]	[0.50, 0.75]	[0.68, 0.71]	[0.78, 0.89]	[0.93, 1.00]
x_2	[0.93, 1.00]	[0.75, 1.00]	[0.54, 0.57]	[0.22, 0.33]	[0.50, 0.54]
x_3	[0.71, 0.79]	[0.50, 1.00]	[0.57, 0.61]	[0.78, 1.00]	[0.56, 0.58]
x_4	[0.57, 0.64]	[0.25, 0.50]	[0.93, 1.00]	[0.56, 0.67]	[0.88, 1.00]

[1] Xu (2011a)

جدول ۱۳-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.39, 0.40]	[0.80, 1.00]	[0.60, 0.67]	[0.70, 0.90]	[0.88, 0.94]
x_2	[0.86, 1.00]	[0.40, 0.80]	[0.53, 0.60]	[0.30, 0.50]	[0.56, 0.58]
x_3	[0.79, 0.86]	[0.20, 0.60]	[0.47, 0.53]	[0.70, 1.00]	[0.58, 0.63]
x_4	[0.57, 0.64]	[0.40, 0.60]	[0.93, 1.00]	[0.40, 0.50]	[0.88, 1.00]

جدول ۱٤-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.34, 0.36]	[0.60, 0.80]	[0.67, 0.73]	[0.60, 0.80]	[0.94, 1.00]
x_2	[0.75, 1.00]	[0.80, 1.00]	[0.57, 0.60]	[0.40, 0.50]	[0.64, 0.65]
x_3	[0.50, 0.75]	[0.40, 1.00]	[0.50, 0.57]	[0.80, 0.90]	[0.63, 0.65]
x_4	[0.63, 0.69]	[0.40, 0.60]	[0.97, 1.00]	[0.40, 0.70]	[0.90, 1.00]

جدول ۱۵-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.37, 0.38]	[0.62, 0.84]	[0.65, 0.70]	[0.70, 0.87]	[0.92, 0.98]
x_2	[0.86, 1.00]	[0.66, 0.94]	[0.55, 0.59]	[0.30, 0.43]	[0.56, 0.59]
x_3	[0.67, 0.80]	[0.38, 0.88]	[0.52, 0.57]	[0.76, 0.97]	[0.59, 0.62]
x_4	[0.59, 0.66]	[0.34, 0.56]	[0.94, 1.00]	[0.46, 0.63]	[0.89, 1.00]

با استفاده از معادله (۴-۱۵) و بردار وزن $\lambda = (0.4, 0.3, 0.3)$ مربوط به خبرگان $d_k (k = 1, 2, 3)$ ماتریسهای تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{4\times5}$ را تجمیع نموده و به ماتریس تصمیم غیرقطعی تجمعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{4\times5}$ که در جدول (۵-۱۵) فهرست شده‌است می‌رسیم:

بر اساس اطلاعات تصمیم موجود در جداول (۵-۱۲) تا (۵-۱۵)، از معادله (۵-۲۵) برای تعیین بردار وزن بهینه w^* استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$w^* = (0.11, 0.02, 0.49, 0.08, 0.30) \qquad (۵-۲۷)$$

مقدار تابع هدف متناظر آن نیز برابر $\tilde{f}(w^*) = 0.008$ است.

بر اساس معادلات (۴-۱۵) و (۵-۲۷) و ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال تجمعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{4\times5}$ مقادیر کلی شاخصه‌ها $\tilde{z}_i(w^*)$ $\left(i = 1, 2, 3, 4\right)$ را به صورت زیر داریم:

$$\tilde{z}_1(w^*) = [0.70, 0.77], \ \tilde{z}_2(w^*) = [0.57, 0.63]$$
$$\tilde{z}_3(w^*) = [0.57, 0.65], \ \tilde{z}_4(w^*) = [0.84, 0.92]$$

با مقایسه دو به دوی $\tilde{z}_i(w)$ $\left(i = 1, 2, 3, 4\right)$ با استفاده از معادله (۴-۲)، می‌توانیم رابطه ترجیح فازی را تشکیل دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.4286 & 0 \\ 0 & 0.5714 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

با جمع عناصر موجود در هر سطر P داریم:

$$p_1 = 2.5, \ p_2 = 0.9286, \ p_3 = 1.0714, \ p_4 = 3.5$$

که با توجه به مقادیر فوق، رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ خواهد بود. که نتیجه می‌شود گزینه چهارم، بهترین گزینه است.

فصل ششم

حل مسائل $MADM$ فاصله‌ای با اطلاعات جزئی اوزان[1]

موضوع توسعه روشهای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد فاصله‌ای و اطلاعات جزئی اوزان، مورد توجه برخی از محققان در سالهای اخیر بوده است. برای مثال فن و هوو[2] یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای تعیین وزن شاخصه‌ها توسعه دادند که البته توانایی رتبه‌بندی گزینه‌ها را نداشت. یوون[3] روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی ارائه داد که با هرکدام از گزینه‌ها به صورت مجزا برخورد می‌کرد. بر اساس مدل برنامه‌ریزی خطی او، ژوو[4] روش دیگری برای رتبه‌بندی گزینه‌ها پیشنهاد داد. لیکن در مدل ژوو هم یک مشکل جدی وجود داشت و آن اینکه اعداد فاصله‌ای مربوط به مقادیر کلی شاخصه‌ها که از این مدل منتج می‌شد بر اساس یک بردار وزنی متفاوت با بردار وزن شاخصه‌ها بود، که همین امر باعث می‌شد عملاً مقایسه گزینه‌ها بطور واقعی امکان‌پذیر نباشد. در ادامهٔ این پژوهشها، فن و ژانگ[5] مدل توسعه‌یافته یوون را بهبود بخشیدند، ولی این مدل نیز محتاج استخراج بردارهای وزنی مختلف تحت شرایط عادی بود و نمی‌توانست وجود اعداد فاصله‌ای که مقادیر کلی شاخصه‌ها به آنها تعلق داشتند را تضمین کند. برای غلبه بر این مشکل، دا و ژوو[6] یک مدل بهینه‌سازی تک هدفه پیشنهاد داده و سپس بر اساس آن یک روش

---

[1] Partial weight information
[2] Fan & Hu (2000)
[3] Yoon (1989)
[4] Xu (2000d)
[5] Fan and Zhang (1999)
[6] Da & Xu (2002)

$MADM$ توسعه دادند. با الهام از ایده درجات انحراف و بیشینه‌سازی مغایرت مقادیر شاخصه‌ها بر روی گزینه‌ها، ژوو[1] یک روش "بیشینه‌سازی انحراف" برای رتبه‌بندی گزینه‌ها توسعه داد. این مدل برای آن دسته از مسائل تصمیم‌گیری مناسب بود که تصمیم‌گیرنده هیچ ترجیحی روی گزینه‌ها نداشت. همچنین، ژوو و گوو[2] یک روش بمنظور "کمینه‌سازی انحراف" برای آن دسته از مسائل $MADM$ که در آنها تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌ها دارای ترجیح بود ایجاد نمودند. سرانجام بر اساس روش تصویر یا افکنش[3]، ژو[4] یک روش $MADM$ با اطلاعات ترجیحی روی گزینه‌ها توسعه داد. در این فصل، این روشها را با جزئیات بیشتر و مثالهای کاربردی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-٦ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه

۱-۱-٦ مدل

یک مسئله $MADM$ را در نظر بگیرید که در آن تمامی اطلاعات وزنی مربوط به شاخصه‌ها به صورت اعداد فاصله‌ای بیان می‌شوند. همچنین، ماتریس تصمیم غیرقطعی و ماتریس نرمال آن را به ترتیب با $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ و $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ نشان می‌دهیم که در آنها $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$ و $\tilde{b}_{ij}=[b_{ij}^L, b_{ij}^U]$ به ازای $i=1, 2, ..., n$ و $j=1, 2, ..., m$ بوده و Φ نیز مجموعه‌ای از وزنهای ممکن باشد که از طریق اطلاعات جزئی اوزان معین می‌شوند.

برای به دست آوردن مقادیر کلی شاخصه‌های هر گزینه، یوون[5] دو مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را پیشنهاد داد:

---

[1] Xu (2001b)
[2] Xu and Gu (2002)
[3] Projection Model
[4] Xu (2005a)
[5] Yoon (1989)

$$\textbf{(M-6.1)}\quad \begin{cases} \min\ z_i^{'}(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j, & i=1,2,\dots,n \\ s.t. \quad w\in\Phi \end{cases}$$

$$\textbf{(M-6.2)}\quad \begin{cases} \min\ z_i^{"}(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_j, & i=1,2,\dots,n \\ s.t. \quad w\in\Phi \end{cases}$$

دو بردار $w_i^{'}=(w_{i1}^{'}, w_{i2}^{'}, \dots, w_{im}^{'})$ و $w_i^{"}=(w_{i1}^{"}, w_{i2}^{"}, \dots, w_{im}^{"})$ را به ترتیب به عنوان جوابهای بهینه بدست آمده برای مدلهای (*M-6.1*) و (*M-6.2*) در نظر بگیرید. با این حساب، مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌های $x_i(i=1,2,\dots,n)$ برابر $\tilde{z}_i=[z_i^L(w_i^{'}), z_i^U(w_i^{"})]$ خواهند بود، جائیکه داریم:

$$z_i^L(w_i^{'})=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_{ij}^{'}, \quad z_i^U(w_i^{"})=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_{ij}^{"}, \ i=1,2,\dots,n \qquad (۶-۱)$$

در این حالت، به تعداد *2n* مسئله برنامه‌ریزی خطی داریم که با حل همه آنها، می‌توانیم مقادیر کلی شاخصه‌ها را برای گزینه‌های $x_i(i=1,2,\dots,n)$ محاسبه کنیم.

در حالت کلی، مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها که از مدلهای (*M-6.1*) و (*M-6.2*) بدست می‌آیند از یک بردار وزن یکسان استفاده نمی‌کنند، که همین امر منجر به عدم مقایسه‌پذیری گزینه‌ها و درنتیجه، واقعی نبودن نتایج می‌شود.

با این فرض که تمامی گزینه‌ها بیطرفانه یا یکسان باشند، فن و ژانگ[1] مدلهای (*M-6.1*) و (*M-6.2*) را بهبود بخشیدند. آنها از روش "تجمیع وزنی برابر خطی[2]" استفاده کرده و ۲n مسئله موجود را به دو مسئله بصورت زیر تبدیل کردند:

$$\textbf{(M-6.3)}\quad \begin{cases} \min\ z_0^{'}(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j \\ s.t. \quad w\in\Phi \end{cases}$$

[1] Fan and Zhang (1999)
[2] Linear Equally Weighted Summation Method

$$\textbf{(M-6.4)} \quad \begin{cases} \min \ z_0^{"}(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_j \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

حال اگر دو بردار $w^{'} = (w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_m^{'})$ و $w^{"} = (w_1^{"}, w_2^{"}, ..., w_m^{"})$ را به عنوان جوابهای بهینه برای دو مدل فوق در نظر بگیرید، در این صورت مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها به شکل اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i = [z_i^L(w^{'}), z_i^U(w^{"})]$ هستند، که در آن:

$$z_i^L(w^{'}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L w_j^{'}, \quad z_i^U(w^{"}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j^{"}, \ \ i = 1, 2, ..., n \qquad (۶-۲)$$

با وجود اینکه $z_i^L(w^{'})$ و $z_i^U(w^{"})$ در مسیر محاسبه خود از بردار وزنی یکسانی، البته به طور جداگانه، استفاده می‌کنند و همچنین نیاز به محاسبات کمتری دارند، ولیکن باز هم بردارهای وزنی $w^{'}$ و $w^{"}$ (در حالت کلی) متفاوت هستند. بنابراین، با توجه به مدلهای (*M-6.3*) و (*M-6.4*) و فرمول (۶-۲)، می‌دانیم که گاهی اوقات ممکن است شرایطی حادث شود که اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i = [z_i^L(w^{'}), z_i^U(w^{"})]$ عملاً وجود نداشته باشند. برای حل این مشکل و با در نظر گرفتن اینکه مدل (*M-6.3*) معادل مدل زیر است (دا و ژوو، (۲۰۰۲)[1]):

$$\textbf{(M-6.5)} \quad \begin{cases} \max \ z_0^{'}(w) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

و از آنجا که مدلهای (*M-6.4*) و (*M-6.5*) دارای محدودیتهای یکسانی‌اند، با ترکیب مدلهای (*M-6.4*) و (*M-6.5*) می‌توانیم مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل دهیم:

$$\textbf{(M-6.6)} \quad \begin{cases} \max \ z(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_{ij}^{U} - r_{ij}^{L}) w_j \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

[1] Da and Xu (2002)

فرض کنید $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ جواب بهینه مدل (*M-6.6*) باشد، آنگاه مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)=[z_i^L(w), z_i^U(w)]$ خواهند بود که در آن:

$$z_i^L(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L, \quad z_i^U(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j, \;\; i=1, 2, ..., n \qquad (۶-۳)$$

از آنجاکه $z_i^L(w)$ و $z_i^U(w)$ از بردار وزنی یکسانی استفاده می‌کنند، تمام گزینه‌ها قابل مقایسه خواهند بود و بعلاوه $z_i^L(w)\le z_i^U(w)$ می‌باشد. با مشاهده مدلهای (*M-6.1*) تا (*M-6.6*) نتیجه می‌گیریم که مدلهای معرفی شده در این بخش ساده هستند و نیاز به محاسباتی کمتری نسبت به سایر مدلها دارند و در نتیجه در شرایط دنیای واقعی، دارای کاربرد بیشتری هستند. با استفاده از مدلهای (*M-6.1*)، (*M-6.2*) و (*M-6.3*) قضیه زیر را استخراج می‌کنیم:

قضیه ۱-٦ (دا و ژوو، (۲۰۰۲)[1]) دو عدد فاصله‌ای $\tilde{y}_i(w)=[y_i^L(w), y_i^U(w)]$ و $[z_i^L(w), z_i^U(w)]$ $=\tilde{z}_i(w)$ را در نظر بگیرید که مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه x_i در این مسئله از معادلات (*M-6.1*)، (*M-6.2*) و (*M-6.6*) بدست آمده‌اند. آنگاه داریم:

$$[y_i^L(w), y_i^U(w)]\supseteq[z_i^L(w), z_i^U(w)]$$

از آنجا که همه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ اعداد فاصله‌ای هستند و رتبه‌بندی مستقیم آنها دشوار است، از معادله (۴-۲) بمنظور محاسبه درجات امکان $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(w)\ge\tilde{z}_j(w))$ مربوط به مقایسه زوجی مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها می‌توان استفاده کرد و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل داد. سپس، از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ استفاده می‌کنیم، که بر اساس آن می‌توان گزینه‌ها را رتبه‌بندی و انتخاب کرد.

[1] Da and Xu (2002)

۲-۱-٦ مثال کاربردی

در این بخش، مسئله $MADM$ مربوط به انتخاب یک نوع سیستم تهویه هوا برای یک کتابخانه (منطبق بر یوون (۱۹۸۹)[1]) را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن به تشریح بهتر مدلهای فوق می‌پردازیم:

مثال ۱-٦ مسئولان یک شهر در حال برنامه‌ریزی برای احداث یک کتابخانه برای شهرداری هستند. یکی از مسائل موجود در فرآیند احداث کتابخانه، تعیین نوع سیستم تهویه‌ای است که باید در کتابخانه انتخاب و نصب شود. پیمانکار پنج طرح پیشنهادی ارائه کرده که تا حدی با ساختار فیزیکی کتابخانه سازگار هستند. گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ که باید از منظر سه پیامد مورد ارزیابی قرار گیرند: اقتصادی، عملیاتی و کارکردی. بر این اساس، دو شاخصه پولی و شش شاخصه غیرپولی در این مسئله وجود دارند که عبارتند از: (۱) u_1: هزینه ابتیاع یا تملک، (۲) u_2: هزینه عملیاتی، (۳) u_3: وضعیت عملکرد*، (۴) u_4: سطح آلودگی صوتی، بر حسب دسی‌بل، (۵) u_5: قابلیت نگهداری*، (۶) u_6: قابلیت اطمینان، (۷) u_7: انعطاف‌پذیری* و (۸) u_8: امنیت. سه شاخصه u_1، u_2 و u_4 از جنس هزینه و باقی شاخصه‌ها از جنس سود می‌باشند. بعلاوه شاخصه‌های ستاره‌دار (*) در مقیاس ده‌تایی سنجش می‌شوند؛ یعنی مقدار ۱ برای بدترین و مقدار ۱۰ برای بهترین. منشاء همه این شاخصه‌ها از سه پیامدی است که در بالاتر به آنها اشاره شد و مقادیر ارزیابی آنها در جدول (۶-۱) فهرست شده‌اند:

جدول ۱-٦ ماتریس تصمیم $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[3.7, 4.7]	[5.9, 6.9]	[8, 10]	[30, 40]
x_2	[1.5, 2.5]	[4.7, 5.7]	[4, 6]	[65, 75]
x_3	[3, 4]	[4.2, 5.2]	[4, 6]	[60, 70]
x_4	[3.5, 4.5]	[4.5, 5.5]	[7, 9]	[35, 45]
x_5	[2.5, 3.5]	[5, 6]	[6, 8]	[50, 60]

[1] Yoon (1989)

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[3, 5]	[90, 100]	[3, 5]	[6, 8]
x_2	[3, 5]	[70, 80]	[7, 9]	[4, 6]
x_3	[7, 9]	[80, 90]	[7, 9]	[5, 7]
x_4	[8, 10]	[85, 95]	[6, 8]	[7, 9]
x_5	[5, 7]	[85, 95]	[4, 6]	[8, 10]

بازه مقادیر وزن شاخصه‌ها به صورت زیر است:

$$\Phi = \Big\{ w = (w_1, w_2, ..., w_8) \,|\, 0.0419 \le w_1 \le 0.0491,\ 0.0840 \le w_2 \le 0.0982,$$
$$0.1211 \le w_3 \le 0.1373,\ 0.1211 \le w_4 \le 0.1373,\ 0.1680 \le w_5 \le 0.1818,$$
$$0.2138 \le w_6 \le 0.2294,\ 0.0395 \le w_7 \le 0.0457,\ 0.1588 \le w_8 \le 0.1706,$$
$$\sum_{j=1}^{8} w_j = 1 \Big\}$$

حال چگونه باید بهترین گزینه را انتخاب نمود؟ در ادامه از روش معرفی شده در بخش (۶-۱-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

گام ۱) از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰) به‌منظور نرمالسازی ماتریس $\tilde{A}$ و تبدیل به ماتریس $\tilde{R}$ که در جدول (۶-۲) نشان داده شده است استفاده می‌کنیم:

جدول ۶-۲ ماتریس تصیم نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.2281, 0.4281]	[0.3089, 0.4382]	[0.4493, 0.7433]	[0.4690, 0.7904]
x_2	[0.4288, 0.7146]	[0.3740, 0.5501]	[0.2247, 0.4460]	[0.2501, 0.3648]
x_3	[0.2680, 0.3573]	[0.4099, 0.5075]	[0.2247, 0.4460]	[0.2680, 0.3952]
x_4	[0.2382, 0.3063]	[0.3876, 0.4737]	[0.3932, 0.6690]	[0.4169, 0.6775]
x_5	[0.3063, 0.4288]	[0.3553, 0.4263]	[0.3370, 0.5946]	[0.3126, 0.4743]

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.1793, 0.4003]	[0.4363, 0.5435]	[0.1771, 0.3965]	[0.3303, 0.5804]
x_2	[0.1793, 0.4003]	[0.3394, 0.4348]	[0.4132, 0.7139]	[0.2202, 0.4353]
x_3	[0.4183, 0.7206]	[0.3878, 0.4892]	[0.4132, 0.7139]	[0.2752, 0.5078]
x_4	[0.4781, 0.8008]	[0.4121, 0.5164]	[0.3542, 0.6344]	[0.3853, 0.6529]
x_5	[0.2988, 0.5604]	[0.4121, 0.5164]	[0.2361, 0.4758]	[0.4404, 0.7255]

گام ۲) مدلهای (M-6.1) و (M-6.2) را برای استخراج جواب بهینه متناظر با هر گزینه حل کرده، که خواهیم داشت:

$$w_i^{'}=(w_{i1}^{'}, w_{i2}^{'}, ..., w_{im}^{'}),\ \ w_i^{''}=(w_{i1}^{''}, w_{i2}^{''}, ..., w_{im}^{''}),\ \ i=1, 2, 3, 4, 5$$

و سپس بازه‌هایی که مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i=[z_i^L(w_i^{'}), z_i^U(w_i^{''})]$ در آنها وجود دارند را برای هر گزینه x_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ بدست می‌آوریم. این مقادیر در جدول (۶-۳) نشاده داده شده‌اند:

جدول ۳-۶ نتایج استخراج شده از حل مدل‌های (M-6.1) و (M-6.2)

	$w_{i1}^{'}$	$w_{i2}^{'}$	$w_{i3}^{'}$	$w_{i4}^{'}$	$w_{i5}^{'}$	$w_{i6}^{'}$	$w_{i7}^{'}$	$w_{i8}^{'}$
x_1	0.0491	0.0982	0.1211	0.1211	0.1818	0.2138	0.0457	0.1692
x_2	0.0419	0.0840	0.1373	0.1311	0.1818	0.2138	0.0395	0.1706
x_3	0.0491	0.0840	0.1373	0.1373	0.1680	0.2142	0.0395	0.1706
x_4	0.0491	0.0982	0.1335	0.1211	0.1680	0.2138	0.0457	0.1706
x_5	0.0491	0.0840	0.1295	0.1373	0.1818	0.2138	0.0457	0.1588

	$w_{i1}^{''}$	$w_{i2}^{''}$	$w_{i3}^{''}$	$w_{i4}^{''}$	$w_{i5}^{''}$	$w_{i6}^{''}$	$w_{i7}^{''}$	$w_{i8}^{''}$
x_1	0.0419	0.0840	0.1373	0.1373	0.1680	0.2214	0.0395	0.1706
x_2	0.0491	0.0982	0.1373	0.1211	0.1680	0.2138	0.0457	0.1668
x_3	0.0419	0.0982	0.1211	0.1211	0.1818	0.2196	0.0457	0.1706
x_4	0.0419	0.0840	0.1373	0.1373	0.1818	0.2138	0.0395	0.1644
x_5	0.0419	0.0840	0.1373	0.1211	0.1818	0.2238	0.0395	0.1706

گام ۳) جواب بهینه بدست آمده از مدلهای (*M-6.3*) و (*M-6.4*) را برای هر گزینه x_i به صورت زیر است:

$$w^{'} = (w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_8^{'}), \quad w^{"} = (w_1^{"}, w_2^{"}, ..., w_8^{"})$$

و همچنین بازه‌هایی که مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i = [z_i^L(w_i^{'}), z_i^U(w_i^{"})]$ برای گزینه‌های x_i به آن تعلق دارند به صورت زیر هستند:

$$w^{'} = (0.0491, 0.0840, 0.1373, 0.1211, 0.1818, 0.2138, 0.0457, 0.1672)$$

$$w^{"} = (0.0419, 0.0840, 0.1373, 0.1249, 0.1818, 0.2138, 0.0457, 0.1706)$$

$$\tilde{z}_1 = [0.3448, 0.5616], \ \tilde{z}_2 = [0.2745, 0.4556], \ \tilde{z}_3 = [0.3348, 0.5230]$$

$$\tilde{z}_4 = [0.4044, 0.6255], \ \tilde{z}_5 = [0.3559, 0.5525]$$

گام ٤) جواب بهینه $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ متناظر با هر گزینه x_i را از حل مدل (*M-6.6*) محاسبه کرده و سپس اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w) = [z_i^L(w_i), z_i^U(w_i)]$ که مقادیر کلی شاخصه‌ها برای هر گزینه x_i به آن تعلق دارند را بدست می‌آوریم:

$$w = (0.0419, 0.0840, 0.1373, 0.1249, 0.1818, 0.2138, 0.0457, 0.1706)$$

$$\tilde{z}_1(w) = [0.3461, 0.5616], \ \tilde{z}_2(w) = [0.2731, 0.4556]$$

$$\tilde{z}_3(w) = [0.3348, 0.5230], \ \tilde{z}_4(w) = [0.4055, 0.6255]$$

$$\tilde{z}_5(w) = [0.3563, 0.5525]$$

از مقایسه نتایج مدلهای موجود در فوق، چنین استنباط می‌شود که در حالت کلی، اعداد فاصله‌ای حاصل از مدل (*M-6.6*) برای مقادیر کلی شاخصه‌ها کوچکترین بازه را دارند.

برای رتبه‌بندی گزینه‌ها، ابتدا از معادله (۴-۲) استفاده کرده و مقادیر شاخصه‌ها (که از حل مدلهای فوق بدست آمده‌اند) را به صورت زوجی مقایسه کرده و ماتریس درجه امکان را ایجاد می‌کنیم، سپس از معادله (۶-۴) برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کنیم که نتیجه آن به صورت زیر است:

۱)

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7157 & 0.5647 & 0.3674 & 0.5032 \\ 0.2843 & 0.5 & 0.3369 & 0.1385 & 0.2729 \\ 0.4353 & 0.6631 & 0.5 & 0.2920 & 0.4344 \\ 0.6326 & 0.8615 & 0.7080 & 0.5 & 0.6443 \\ 0.4968 & 0.7271 & 0.5656 & 0.3557 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$v = (0.2076, 0.1516, 0.1912, 0.2423, 0.2073)$$

بر اساس ماتریس فوق و درجات امکان P، رتبه‌بندی گزینه‌ها را به صورت اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ را به صورت زیر داریم:

$$\tilde{z}_4(w) \underset{0.6326}{\geq} \tilde{z}_1(w) \underset{0.5032}{\geq} \tilde{z}_5(w) \underset{0.5656}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{0.6631}{\geq} \tilde{z}_2(w)$$

که با توجه به مقادیر فوق، رتبه‌بندی گزینه‌های x_i به شکل زیر می‌باشد:

$$x_4 \underset{0.6326}{\succ} x_1 \underset{0.5032}{\succ} x_5 \underset{0.5656}{\succ} x_3 \underset{0.6631}{\succ} x_2$$

به طور مشابه، موارد ۲ و ۳ نیز به شکل زیر می‌باشند:

۲)

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7157 & 0.5647 & 0.3674 & 0.5032 \\ 0.2843 & 0.5 & 0.3369 & 0.1385 & 0.2729 \\ 0.4353 & 0.6631 & 0.5 & 0.2920 & 0.4344 \\ 0.6326 & 0.8615 & 0.7080 & 0.5 & 0.6443 \\ 0.4968 & 0.7271 & 0.5656 & 0.3557 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$v = (0.2069, 0.1498, 0.1919, 0.2435, 0.2079)$$

$$x_4 \underset{0.6454}{\succ} x_5 \underset{0.5024}{\succ} x_1 \underset{0.5600}{\succ} x_3 \underset{0.6729}{\succ} x_2$$

۳)

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7249 & 0.5618 & 0.3584 & 0.4987 \\ 0.2751 & 0.5 & 0.3259 & 0.1245 & 0.2622 \\ 0.4382 & 0.6741 & 0.5 & 0.2898 & 0.4337 \\ 0.6416 & 0.8755 & 0.7122 & 0.5 & 0.6468 \\ 0.5013 & 0.7378 & 0.5663 & 0.3532 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$v = (0.2072,\ 0.1494,\ 0.1917,\ 0.2435,\ 0.2079)$$

$$x_4 \underset{0.6468}{\succ} x_5 \underset{0.5013}{\succ} x_1 \underset{0.5618}{\succ} x_3 \underset{0.6741}{\succ} x_2$$

بنابراین، رتبه‌بندی گزینه‌ها در حالت ۲ و ۳ شبیه یکدیگر است و در مقایسه با حالت ۱، تنها تفاوت در رتبه‌بندی x_1 و x_5 است. ولی در هر سه حالت x_4 بهترین گزینه است.

۶-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر درجه انحراف[1] و درجه امکان[2]

۶-۲-۱ الگوریتم

در ادامه، به معرفی یک الگوریتم "بیشینه‌سازی انحراف" مبتنی بر درجات انحراف و درجات امکان برای حل مسائل *MADM* می‌پردازیم. گامهای الگوریتم به این شکل هستند:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، گیریم X ، U، $\tilde{A}$، $\tilde{R}$ و Φ به ترتیب معادل مجموعه گزینه‌ها، مجموعه شاخصه‌ها، ماتریس تصمیم، فرم نرمال ماتریس تصمیم و مجموعه اوزان ممکن برای شاخصه‌ها باشند که به وسیله اطلاعات جزئی اوزان تعیین می‌شوند.

---

[1] Deviation Degree
[2] Possibility Degree

گام ۲) از تعریف درجه انحراف اعداد فاصله‌ای (تعریف (۵-۱)) و ایده بیشینه‌سازی مقادیر شاخصه‌ها برای گزینه‌ها استفاده کرده و مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل دهید:

$$\textbf{(M-6.7)}\quad \begin{cases} \max\ D(w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left\| \tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_{lj} \right\| w_j \\ \qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(| r_{ij}^{L} - r_{lj}^{L} | + | r_{ij}^{U} - r_{lj}^{U} | \right) \omega_j \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

با حل مدل فوق، بردار وزن بهینه w را بدست آورید.

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ برای گزینه‌های $x_i (i=1, 2, ..., n)$ را با استفاده از معادله (۴-۱۵) بدست آورید.

گام ٤) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w) \geq \tilde{z}_j(w))$ حاصل از مقایسه زوجی مقادیر کلی شاخصه‌ها برای گزینه‌ها را با استفاده از معادله (۴-۲) بدست آورده و ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n \times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ مربوط به ماتریس درجات امکان P را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست آورده و گزینه‌ها را بر اساس مقادیر عناصر بردار v رتبه‌بندی کنید.

جدول ٤-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[5, 6]	[6, 8]	[6, 7]	[4, 6]	[7, 8]	[8, 10]
x_2	[6, 8]	[5, 7]	[8, 9]	[7, 8]	[4, 7]	[7, 8]
x_3	[5, 7]	[6, 7]	[8, 10]	[7, 9]	[5, 7]	[6, 7]
x_4	[8, 10]	[5, 6]	[4, 7]	[5, 7]	[6, 8]	[4, 7]
x_5	[8, 10]	[6, 8]	[5, 6]	[6, 9]	[7, 9]	[5, 8]

۶-۲-۲ مثال کاربردی

مثال ۶-۲ یک مسئله MADM را در نظر بگیرید که در آن تولیدکننده قصد تولید نوعی سامانه موشکی ضدکشتی را دارد. پنج گزینه $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ برای تولیدکننده وجود دارد. شش شاخصه برای ارزیابی عملکرد سامانه‌های ضد کشتی استفاده شدند (ژانگ و همکاران، (۲۰۰۰)[1]) که عبارتند از: (۱) u_1: قابلیت اصابت و تخریب موشک، (۲) u_2: قابلیت کنترل سیستمهای شلیک، (۳) u_3: قابلیت رفع گیر، (۴) u_4: قابلیت کنترل پرواز موشک، (۵) u_5: قابلیت هدایت موشک و (۶) u_6: قابلیت حمل. تمام این شاخصه‌ها از جنس سود بوده و تصمیم‌گیرنده گزینه‌ها را تحت شاخصه‌ها با استفاده از سیستم ۱۰ امتیازی از ۱ (بدترین) تا ۱۰ (بهترین) ارزیابی می‌کند. اطلاعات ارزیابی در ماتریس تصمیم $\tilde{A}$ قرار گرفته‌اند که در جدول (۶-۴) قابل مشاهده هستند:

اطلاعات اوزان معلوم نیز به شکل زیر می‌باشند:

$$\Phi=\Big\{ w=(w_1,\, w_2,\, ...,\, w_6)\,|\, 0.16\le w_1\le 0.20,\;\; 0.14\le w_2\le 0.16,\; 0.15\le w_3\le 0.18\,,$$

$$0.13\le w_4\le 0.17\;,\;\; 0.14\le w_5\le 0.18,\;\; 0.11\le w_6\le 0.19\,,\; \sum_{j=1}^{6} w_j\; =1\Big\}$$

اکنون از روش معرفی شده در بخش (۶-۲-۱) برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کنیم. شش گام را طی می‌کنیم:

جدول ۶-۵ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.268, 0.410]	[0.371, 0.636]	[0.338, 0.489]
x_2	[0.321, 0.547]	[0.309, 0.557]	[0.451, 0.629]
x_3	[0.268, 0.479]	[0.371, 0.557]	[0.451, 0.698]
x_4	[0.428, 0.684]	[0.309, 0.477]	[0.225, 0.489]
x_5	[0.428, 0.684]	[0.371, 0.636]	[0.282, 0.419]

[1] Zhang et al. (2000)

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.227, 0.454]	[0.400, 0.605]	[0.443, 0.725]
x_2	[0.397, 0.605]	[0.228, 0.529]	[0.338, 0.580]
x_3	[0.397, 0.680]	[0.285, 0.529]	[0.332, 0.508]
x_4	[0.284, 0.529]	[0.342, 0.605]	[0.222, 0.508]
x_5	[0.340, 0.680]	[0.400, 0.680]	[0.277, 0.580]

گام ۱) ماتریس تصمیم $\tilde{A}$ را با استفاده از معادله (۴-۹) نرمال کرده و به ماتریس $\tilde{R}$ می‌رسیم (جدول (۶-۵)):

گام ۲) از مدل بهینه‌سازی معرفی شده در الگوریتم برای تشکیل مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max\ D(w) = 4.932w_1 + 2.336w_2 + 5.276w_3 + 4.224w_4 + 3.348w_5 + 4.236w_6 \\ s.t. \quad 0.16 \le w_1 \le 0.20,\ 0.14 \le w_2 \le 0.16,\ 0.15 \le w_3 \le 0.18, \\ \qquad 0.13 \le w_4 \le 0.17,\ 0.14 \le w_5 \le 0.18,\ 0.11 \le w_6 \le 0.19,\ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \end{cases}$$

با حل مدل، بردار وزن بهینه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w = (0.20,\ 0.14,\ 0.18,\ 0.15,\ 0.14,\ 0.19)$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ را با استفاده از معادله (۴-۲) بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(w) = [0.3406,\ 0.5496],\ \tilde{z}_2(w) = [0.3538,\ 0.5756]$$
$$\tilde{z}_3(w) = [0.3493,\ 0.5720],\ \tilde{z}_4(w) = [0.3020,\ 0.5522]$$
$$\tilde{z}_5(w) = [0.3479,\ 0.6087]$$

گام ٤) از معادله (۴-۲) برای محاسبه درجات امکان حاصل از مقایسه مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها به صورت دو به دو استفاده می‌کنیم و ماتریس درجات امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4545 & 0.4640 & 0.5392 & 0.4293 \\ 0.5455 & 0.5 & 0.5091 & 0.5797 & 0.4718 \\ 0.5360 & 0.4909 & 0.5 & 0.5709 & 0.4635 \\ 0.4608 & 0.4203 & 0.4291 & 0.5 & 0.3998 \\ 0.5707 & 0.5282 & 0.5365 & 0.6002 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۵) بردار اولویت ماتریس P را با استفاده از معادله (۴-۶) استخراج می‌کنیم:

$$v=(0.1943,\ 0.2053,\ 0.2031,\ 0.1855,\ 0.2118)$$

بر بردار فوق و درجات امکان P، رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_5(w) \underset{0.5282}{\geq} \tilde{z}_2(w) \underset{0.5091}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{0.5360}{\geq} \tilde{z}_1(w) \underset{0.5392}{\geq} \tilde{z}_4(w)$$

که بر اساس آن رتبه‌بندی گزینه‌ها نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$x_5 \underset{0.5282}{\succ} x_2 \underset{0.5091}{\succ} x_3 \underset{0.5360}{\succ} x_1 \underset{0.5392}{\succ} x_4$$

که گزینه پنجم، بهترین گزینه است.

۳-٦ روش برنامه‌ریزی آرمانی برای تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد فاصله‌ای

۱-۳-٦ روش تصمیم‌گیری

$w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_m)$ را بردار وزن شاخصه‌ها در نظر بگیرید که در آن:

$$w_j \in [w_j^L,\ w_j^U] \quad w_j \geq 0 \quad j=1,\ 2,\ ...,\ m \quad \sum_{j=1}^{m} w_j = 1$$

و ماتریس تصمیم نرمال را $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ در نظر بگیرید که در آن $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^{L},\, r_{ij}^{U}]$ است. مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها به صورت اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)=[z_i^{L}(w),\, z_i^{U}(w)]$ بیان می‌شوند و طبق معادله (۴–۱۵) داریم:

$$z_i^{L}(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j,\ \ i=1,2,\ldots,n \qquad (۶–۴)$$

$$z_i^{U}(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_j,\ \ i=1,2,\ldots,n \qquad (۶–۵)$$

در معادلات فوق w، جواب مدل بهینه‌سازی چندهدفه زیر است:

$$\textbf{(M-6.8)}\quad \begin{cases} \min\ z_i'(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j, & i=1,2,\ldots,n \\ \max\ z_i''(w)=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_j, & i=1,2,\ldots,n \\ s.t.\quad w_j\in[w_j^{L},\, w_j^{U}],\ w_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \sum_{j=1}^{m} w_j=1 \end{cases}$$

این مدل به دنبال تعیین اعداد فاصله‌ای مقادیر کلی شاخصه‌ها روی هر گزینه است و در این راستا از بردار وزن یکسانی استفاده می‌کند، بنابراین همه گزینه‌ها قابل مقایسه هستند. از روی مدل (*M-6.8*) نتیجه می‌شود که انتظار می‌رود تابع $z_i'(w)$ در کمینه خودش به مقدار $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{L} w_j^{L}$ برسد، درحالی که انتظار می‌رود مقدار تابع هدف $z_i''(w)$ در بیشنیه خودش به مقدار $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^{U} w_j^{U}$ برسد. در چنین مواقعی، به منظور حل مدل (*M-6.8*) می‌توانیم آن را به مدل برنامه‌ریزی آرمانی خطی تبدیل کنیم:

$$\textbf{(M-6.9)}\quad \begin{cases} \min\ J = P_1\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{1i}d_i^- + \beta_{1i}e_i^+) + P_2\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{2i}d_i^+ + \beta_{2i}e_i^-) \\ s.t.\quad \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^L w_j + d_i^- - d_i^+ = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^L w_j^L, \quad i=1,2,\ldots,n \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j + e_i^- - e_i^+ = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j^U, \quad i=1,2,\ldots,n \\ \qquad w_j \in [w_j^L, w_j^U],\ w_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n,\ \sum\limits_{j=1}^{m} w_j = 1 \\ \qquad d_i^-, d_i^+, e_i^-, e_i^+ \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,n \end{cases}$$

که $P_i(i=1,2)$ ها فاکتورهای اولویت بوده و نشان‌دهنده درجات اهمیت اهداف $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{1i}d_i^- + \beta_{1i}e_i^+)$ و $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_{2i}d_i^+ + \beta_{2i}e_i^-)$ هستند، d_i^- متغیر انحراف تابع هدف $z_i^{'}(w)$ است برای وقتی که مقدار آن پایین‌تر از $\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^L w_j^L$ قرار گیرد؛ d_i^+ نیز متغیر انحراف مثبت برای تابع هدف $z_i^{'}(w)$ بوده برای حالتی که مقدار آن بالاتر از مقدار $\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^L w_j^L$ فرض می‌شود. e_i^- متغیر انحراف منفی برای تابع هدف $z_i^{''}(w)$ است برای وقتی که که مقدار آن کمتر از مقدار مورد انتظار $\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j^U$ قرار گیرد. e_i^+ نیز متغیر انحراف مثب برای تابع هدف $z_i^{''}(w)$ است برای زمانی که مقدار بالای $\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}^U w_j^U$ فرض می‌شود؛ α_{1i} و β_{1i} به ترتیب ضرایب وزن d_i^- و e_i^+ هستند؛ α_{2i} و β_{2i} به ترتیب ضرایب وزنی d_i^+ و e_i^- می‌باشند. برای سهولت کار، تمامی توابع هدف را منصفانه در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\alpha_{1i} = \beta_{1i} = \alpha_{2i} = \beta_{2i} = 1, \quad i=1,2,\ldots,n$$

با حل مدل *(M-6.9)* بردار وزن بهینه $w=(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ را بدست می‌آوریم. با ترکیب بردار w با معادلات (۶-۴) و (۶-۵)، مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)\ (i=1,2,\ldots,n)$ روی گزینه‌های x_i را بدست

می‌آوریم. بعد از انجام اینکار، می‌توان از گامهای ۴ و ۵ الگوریتم معرفی شده در بخش (۶-۲-۱) برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده کرد.

۶-۳-۲ مثال کاربردی

مثال ۶-۳ از مثال (۶-۲) برای درک بهتر روش معرفی شده در بخش (۶-۳-۱) استفاده می‌کنیم:

فرض کنید اطلاعات وزنی معلوم به صورت زیر باشد:

$$\Phi = \{ w = (w_1, w_2, ..., w_m) \,|\, 0.3350 \le w_1 \le 0.3755,\ 0.3009 \le w_2 \le 0.3138$$
$$0.3194 \le w_3 \le 0.3363,\ w_1 + w_2 + w_3 = 1\}$$

در ادامه، از روش معرفی شده در بخش (۶-۳-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم. برای این منظور روند زیر باید طی شود:

گام ۱) بر اساس مدل *(M-6.9)* مدل برنامه‌ریزی آرمانی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \min\ J = P_1 \sum_{i=1}^{5} (d_i^- + e_i^+) + P_2 \sum_{i=1}^{5} (d_i^- + e_i^-) \\ s.t.\quad 0.214w_1 + 0.166w_2 + 0.184w_3 + d_1^- - d_1^+ = 0.1804 \\ \qquad 0.206w_1 + 0.220w_2 + 0.182w_3 + d_2^- - d_2^+ = 0.1938 \\ \qquad 0.195w_1 + 0.192w_2 + 0.220w_3 + d_3^- - d_3^+ = 0.1934 \\ \qquad 0.181w_1 + 0.195w_2 + 0.185w_3 + d_4^- - d_4^+ = 0.1784 \\ \qquad 0.175w_1 + 0.193w_2 + 0.201w_3 + d_5^- - d_5^+ = 0.1809 \\ \qquad 0.220w_1 + 0.178w_2 + 0.190w_3 + e_1^- - e_1^+ = 0.2024 \\ \qquad 0.225w_1 + 0.229w_2 + 0.191w_3 + e_2^- - e_2^+ = 0.2206 \\ \qquad 0.204w_1 + 0.198w_2 + 0.231w_3 + e_3^- - e_3^+ = 0.2164 \\ \qquad 0.190w_1 + 0.205w_2 + 0.195w_3 + e_4^- - e_4^+ = 0.2012 \\ \qquad 0.184w_1 + 0.201w_2 + 0.211w_3 + e_5^- - e_5^+ = 0.2031 \\ \qquad 0.3350 \le w_1 \le 0.3755,\ 0.3009 \le w_2 \le 0.3138 \\ \qquad 0.3194 \le w_3 \le 0.3363,\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ \qquad d_i^-, d_i^+, e_i^-, e_i^+ \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

برای حل این مدل از روش برنامه‌ریزی آرمانی چندمرحله‌ای استفاده کرده و براساس آن بردار وزن بهینه را بدست می‌آوریم:

$$w = (0.3755,\ 0.3009,\ 0.3236)$$

گام ۲) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ روی گزینه‌های x_i را از طریق معادلات (۶-۴) و (۶-۵) بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(w) = [0.1898,\ 0.1977],\ \tilde{z}_2(w) = [0.2020,\ 0.2152]$$
$$\tilde{z}_3(w) = [0.2022,\ 0.2109],\ \tilde{z}_4(w) = [0.1865,\ 0.1961]$$
$$\tilde{z}_5(w) = [0.1888,\ 0.1979]$$

گام ۳) با استفاده از معادله (۴-۲) درجات امکان را حساب کنید. برای اینکار مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ را بصورت زوجی مقایسه کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.6400 & 0.5235 \\ 1 & 0.5 & 0.6047 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3953 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3600 & 0 & 1 & 0.5 & 0.3904 \\ 0.4765 & 0 & 1 & 0.6096 & 0.5 \end{pmatrix}$$

که بردار اولویت ماتریس فوق با استفاده از معادله (۶-۴) به شکل زیر است:

$$v = (0.1582,\ 0.2802,\ 0.1698,\ 0.1875,\ 0.2043)$$

سپس بر اساس این بردار و درجات امکان ماتریس P، رتبه‌بندی مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ را بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_2(w) \underset{1}{\geq} \tilde{z}_5(w) \underset{0.6096}{\geq} \tilde{z}_4(w) \underset{1}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{1}{\geq} \tilde{z}_1(w)$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $\tilde{z}_i(w)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_2 \underset{1}{\succ} x_5 \underset{0.6096}{\succ} x_4 \underset{1}{\succ} x_3 \underset{1}{\succ} x_1$$

که گزینه دوم بهترین گزینه است.

٦-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی‌بر کمینه‌سازی انحرافات باوجود ترجیحات روی گزینه‌ها

٦-٤-١ روش تصمیم‌گیری

در ادامه به معرفی یک روش کمینه‌سازی انحراف برای حل مسائل $MADM$ می‌پردازیم که در آن تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌ها ترجیحاتی دارد:

گام ۱) یک مسئله $MADM$ در نظر بگیرید که مشخصات زیر را داراست: اولاً فقط اطلاعات جزئی در مورد وزن شاخصه‌ها وجود دارد، ثانیاً مقادیر شاخصه‌ها در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شوند و ثالثاً تصمیم‌گیرنده ترجیحات ذهنی روی گزینه x_i دارد. مقدار ترجیح تصمیم‌گیرنده را در اینجا به شکل عدد فاصله‌ای $\tilde{\vartheta}_i=[\vartheta_i^L,\vartheta_i^U]$ نشان می‌دهیم که در آن $0\le\vartheta_i^L\le\vartheta_i^U\le 1$ می‌باشد. همچنین، مقدار شاخصه $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$ در ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را به عنوان مقدار عینی یا واقعی ترجیح تصمیم‌گیرنده روی گزینه x_i نسبت به شاخصه u_j در نظر می‌گیریم.

به دلیل محدودیتهای ایجاد شده ناشی از یک سری شرایط، میان مقدار ترجیح ذهنی تصمیم‌گیرنده و مقدار عینی ترجیح، اختلاف وجود دارد. به منظور اتخاذ یک تصمیم معقول، بردار وزن شاخصه‌ها باید طوری انتخاب گردد که اختلاف کل بین مقادیر ترجیح ذهنی و واقعی را تا حد ممکن کوچک نماید. در نتیجه، بر اساس مفهوم درجه انحراف حاصل از مقایسه اعداد فاصله‌ای که در تعریف (۵-۱) بیان شد، مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل دهید:

$$
\textbf{(M-6.10)}\quad \begin{cases} \max\ D(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left\|\tilde{r}_{ij}-\tilde{s}_j\right\|w_j \\ \qquad\qquad =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(|r_{ij}^L-s_j^L|+|r_{ij}^U-s_j^U|\right)w_j \\ s.t.\quad w\in\Phi \end{cases}
$$

با حل مدل فوق، بردار وزن بهینه w را بدست آورید.

گام ۲) از معادله (۵-۶) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ روی گزینه‌های x_i استفاده کنید.

گام ۳) معادله (۴-۲) را برای محاسبه درجات امکان مقایسه اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ محاسبه نموده و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٤) بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست آورده و گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر عناصر بردار v به صورت نزولی مرتب کنید.

۲-٤-٦ مثال کاربردی

مثال ٤-٦ یک مشتری متقاضی خرید یخچال را در نظر بگیرید که قصد انتخاب یک نوع یخچال از میان پنج نوع یخچال را دارد. مشتری شش شاخصه را برای ارزیابی گزینه‌ها در نظر می‌گیرد: (۱) u_1: ایمنی، (۲) u_2: عملکرد یخچال، (۳) u_3: طراحی، (۴) u_4: قابلیت اطمینان، (۵) u_5: صرفه اقتصادی و (۶) u_6: زیبایی. تمامی شاخصه‌ها در این مسئله از جنس سود هستند و تصمیم‌گیرنده یخچالهای $x_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., 6)$ در مقیاس ۱ تا ۱۰ مقایسه می‌کند که عدد ۱ به‌معنای بدترین و عدد ۱۰ به معنای بهترین است و ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ (جدول (۶-۶)) تشکیل می‌دهد:

جدول ٦-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[6, 8]	[8, 9]	[7, 8]	[5, 6]	[6, 7]	[8, 9]
x_2	[7, 9]	[5, 7]	[6, 7]	[7, 8]	[6, 8]	[7, 9]
x_3	[5, 7]	[6, 8]	[7, 9]	[6, 7]	[7, 8]	[8, 9]
x_4	[6, 7]	[7, 8]	[7, 9]	[5, 6]	[8, 9]	[7, 8]
x_5	[7, 8]	[6, 7]	[6, 8]	[4, 6]	[5, 7]	[9, 10]

اطلاعات وزنی معلوم به شکل زیر هستند:

$$\Phi = \{ w=(w_1, w_2, ..., w_6) \,|\, 0.25 \le w_1 \le 0.30,\ 0.15 \le w_2 \le 0.20,\ 0.10 \le w_3 \le 0.20,$$
$$0.12 \le w_4 \le 0.24,\ 0.11 \le w_5 \le 0.18,\ 0.15 \le w_6 \le 0.22,\ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \}$$

در ادامه، این مسئله را با استفاده از روش معرفی شده در بخش (۶-۴-۱) حل می‌کنیم:

گام ۱) ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ را نرمال نموده و ماتریس $\tilde{R}$ را با استفاده از معادله (۴-۱۳) تشکیل می‌دهیم. ماتریس $\tilde{R}$ در جدول (۶-۷) قرار دارد:

جدول ۷-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی‌نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.154, 0.258]	[0.205, 0.281]	[0.171, 0.242]
x_2	[0.179, 0.290]	[0.128, 0.219]	[0.146, 0.212]
x_3	[0.128, 0.226]	[0.154, 0.250]	[0.171, 0.273]
x_4	[0.154, 0.226]	[0.179, 0.250]	[0.171, 0.273]
x_5	[0.179, 0.258]	[0.154, 0.219]	[0.146, 0.242]

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.152, 0.222]	[0.154, 0.219]	[0.178, 0.231]
x_2	[0.212, 0.296]	[0.154, 0.250]	[0.156, 0.231]
x_3	[0.182, 0.259]	[0.179, 0.250]	[0.178, 0.231]
x_4	[0.152, 0.222]	[0.205, 0.281]	[0.156, 0.205]
x_5	[0.121, 0.222]	[0.128, 0.219]	[0.200, 0.256]

گام ۲) فرض کنید تصمیم‌گیرنده روی یخچالها ترجیحات ذهنی دارد (که پس از نرمالسازی داریم):

$$\tilde{\vartheta}_1 = [0.16, 0.18],\ \tilde{\vartheta}_2 = [0.17, 0.19],\ \tilde{\vartheta}_3 = [0.23, 0.25]$$
$$\tilde{\vartheta}_4 = [0.15, 0.20],\ \tilde{\vartheta}_5 = [0.18, 0.22]$$

از معادلهٔ $d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i) = |r_{ij}^L - \vartheta_i^L| + |r_{ij}^U - \vartheta_i^U| \ (i=1, 2, 3, 4, 5, \ \ j=1, 2, ..., 6)$ برای محاسبه درجات انحراف مقادیر ترجیح ذهنی و واقعی استفاده می‌کنیم. مقادیر انحراف در جدول (۶–۸) قابل مشاهده هستند.

با استفاده از مدل (*M-6.10*) مدل بهینه‌سازی تک‌هدفه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \min\ D(w) = 0.388w_1 + 0.399w_2 + 0.351w_3 + 0.340w_4 + 0.363w_5 + 0.262w_6 \\ s.t. \quad 0.25 \le w_1 \le 0.30, \quad 0.15 \le w_2 \le 0.20, \quad 0.10 \le w_3 \le 0.20, \\ \qquad 0.12 \le w_4 \le 0.24, \quad 0.11 \le w_5 \le 0.18, \quad 0.15 \le w_6 \le 0.22, \ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \end{cases}$$

جدول ۸–٦ درجات انحراف مقادیر ترجیح واقعی[1] و مقادیر ترجیح ذهنی[2]

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$d(\tilde{r}_{1j}, \tilde{\vartheta}_1)$	0.084	0.146	0.073	0.050	0.045	0.069
$d(\tilde{r}_{2j}, \tilde{\vartheta}_2)$	0.109	0.071	0.046	0.148	0.076	0.055
$d(\tilde{r}_{3j}, \tilde{\vartheta}_3)$	0.126	0.076	0.082	0.057	0.051	0.071
$d(\tilde{r}_{4j}, \tilde{\vartheta}_4)$	0.030	0.079	0.094	0.024	0.136	0.011
$d(\tilde{r}_{5j}, \tilde{\vartheta}_5)$	0.039	0.027	0.056	0.061	0.055	0.056

با حل مدل، بردار وزن بهینه را بدست می‌آوریم:

$$w = (0.25, 0.15, 0.10, 0.17, 0.11, 0.22)$$

[1] Objective Preferences
[2] Subjective Preferences

گام ۳) از معادله (۴-۵) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{z}_1(w)=[0.1683,\ 0.2435],\ \ \tilde{z}_2(w)=[0.1659,\ 0.2552]$$
$$\tilde{z}_3(w)=[0.1620,\ 0.2437],\ \ \tilde{z}_4(w)=[0.1652,\ 0.2351]$$
$$\tilde{z}_5(w)=[0.1611,\ 0.2397]$$

گام ٤) درجات امکان مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌های $x_i(i=1,2,3,4,5)$ را با استفاده از معادله (۴-۲) محاسبه می‌کنیم و ماتریس درجه امکان زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4717 & 0.5194 & 0.5396 & 0.5358 \\ 0.5283 & 0.5 & 0.5450 & 0.5653 & 0.5605 \\ 0.4806 & 0.4550 & 0.5 & 0.5178 & 0.5153 \\ 0.4604 & 0.4347 & 0.4822 & 0.5 & 0.4983 \\ 0.4642 & 0.4395 & 0.4847 & 0.5017 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ٥) بردار اولویت این ماتریس را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست می‌آوریم:

$$v=(0.2033,\ 0.2100,\ 0.1984,\ 0.1938,\ 0.1945)$$

که بر اساس آن و درجات امکان P، رتبه‌بندی اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_2(w)\underset{0.5283}{\geq}\tilde{z}_1(w)\underset{0.5194}{\geq}\tilde{z}_3(w)\underset{0.5153}{\geq}\tilde{z}_5(w)\underset{0.5017}{\geq}\tilde{z}_4(w)$$

گام ٦) گزینه‌های x_i را با توجه به مقادیر $\tilde{z}_i(w)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_2\underset{0.5283}{\succ}x_1\underset{0.5194}{\succ}x_3\underset{0.5153}{\succ}x_5\underset{0.5017}{\succ}x_4$$

بنابراین، یخچال دوم از سایر یخچالها بهتر است.

٦-٥ تصمیم‌گیری چندشاخصه با اعداد فاصله‌ای بر اساس مدل تصویر یا اَفکنِش[1]

٦-٥-١ مدل و روش

فرض کنید بردار $\tilde{z}(w)=(\tilde{z}_1(w),\ \tilde{z}_2(w),\ ...,\ \tilde{z}_n(w))$ عملاً بردار مقادیر کلی شاخصه‌ها باشد بگونه‌ای که:

$$\tilde{z}_i(w)=[z_i^L(w),\ z_i^U(w)]=\sum_{j=1}^{m} w_j\tilde{r}_{ij}=\left[\sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij}^L,\ \sum_{j=1}^{m} w_j r_{ij}^U\right]$$

و همچنین داشته باشیم:

$$z^L(w)=(z_1^L(w),\ z_2^L(w),\ ...,\ z_n^L(w))$$
$$z^U(w)=(z_1^U(w),\ z_2^U(w),\ ...,\ z_n^U(w))$$

بنابراین تساوی $\tilde{z}(w)=[z^L(w),\ z^U(w)]$ برقرار است.

فرض کنید تصمیم‌گیرنده ترجیحات ذهنی $\tilde{\vartheta}=(\tilde{\vartheta}_1,\ \tilde{\vartheta}_2,\ ...,\ \tilde{\vartheta}_n)$ را روی گزینه‌ها دارد. یعنی:

$$\vartheta^L=(\vartheta_1^L,\ \vartheta_2^L,\ ...,\ \vartheta_n^L)\qquad \vartheta^U=(\vartheta_1^U,\ \vartheta_2^U,\ ...,\ \vartheta_n^U)$$

در نتیجه $\tilde{\vartheta}=[\vartheta^L,\ \vartheta^U]$ می‌باشد.

در یک مسئله *MADM*، معمولاً از مقادیر کلی شاخصه‌ها برای رتبه‌بندی و انتخاب بهترین گزینه استفاده می‌کنیم. اگر بردار $\tilde{z}(w)$ که مقادیر کلی شاخصه‌هاست به طور کامل با بردار $\tilde{\vartheta}$ که نشاندهنده مقادیر ترجیحات ذهنی است سازگار باشد، آنگاه می‌توان از بردار $\tilde{\vartheta}$ برای رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده کرد. ولی به دلیل وجود محدودیتهای ناشی از برخی شرایط، بین بردارهای $\tilde{z}(w)$ و $\tilde{\vartheta}$ اختلاف وجود دارد. برای اخذ یک تصمیم معقول، تعیین بردار وزن شاخصه‌ها w باید بگونه‌ای باشد تا انحراف بین این دو بردار را تا حد ممکن کوچک سازد. بنابراین:

[1] Projection Model

$$\cos\,\theta_1=\cos(z^L(w),\,\vartheta^L)=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^L(w)\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^L(w)\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\vartheta_i^L\right)^2}} \tag{۶-۶}$$

$$\cos\,\theta_2=\cos(z^U(w),\,\vartheta^U)=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^U(w)\vartheta_i^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^U(w)\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\vartheta_i^U\right)^2}} \tag{۶-۷}$$

واضح است که هرچه مقادیر $\cos\,\theta_1$ و $\cos\,\theta_2$ کوچکتر باشند، جهت‌های $z^L(w)$ و ϑ^L و همچنین جهت‌های $z^U(w)$ و ϑ^U به یکدیگر نزدیکتر است. ولی، همانطور که می‌دانیم هر بردار از یک جهت و یک اندازه تشکیل شده است. $\cos\,\theta_1$ و $\cos\,\theta_2$ فقط شباهت بین جهت بردارهای $z^L(w)$ و ϑ^L و همچنین $z^U(w)$ و ϑ^U را نشان می‌دهند. بنابراین، اندازه بردارهای $z^L(w)$ و $z^U(w)$ نیز باید در نظر گرفته شود. به منظور اندازه‌گیری درجه شباهت میان بردارهای α و β از دیدگاه کلی، در ادامه فرمولهای تصویر یا افکنش بردار $z^L(w)$ روی ϑ^L و افکنش بردار $z^U(w)$ روی ϑ^U را به ترتیب معرف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Pr\,j_{\vartheta^L}(z^L(w))&=\left|z^L(w)\right|\,\cos\,\theta_1\\
&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i^L(w))^2}\;\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^L(w)\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i^L(w))^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i^L)^2}}\\
&=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^L(w)\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\vartheta_i^L)^2}}=\sum_{i=1}^{n} z_i^L(w)\bar{\vartheta}_i^L\end{aligned} \tag{۶-۸}$$

و به طور مشابه داریم:

$$\Pr\,j_{\vartheta^U}(z^U(w))=\left|z^U(w)\right|\,\cos\,\theta_2=\sum_{i=1}^{n} z_i^U(w)\bar{\vartheta}_i^U \tag{۶-۹}$$

که

$$\left|z^L(w)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i^L(w))^2} \quad \text{و} \quad \left|z^U(w)\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i^U(w))^2}$$

به ترتیب نشان‌دهنده اندازه‌های $z^L(w)$ و $z^U(w)$ هستند و همچنین:

$$\bar{\vartheta}_i^L = \frac{\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\vartheta_i^L)^2}} \quad \text{و} \quad \bar{\vartheta}_i^U = \frac{\vartheta_i^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\vartheta_i^U)^2}}$$

واضح است که هرچه مقادیر $\Pr j_{\vartheta^L}(z^L(w))$ و $\Pr j_{\vartheta^U}(z^U(w))$ بزرگتر باشند، $z^L(w)$ به ϑ^L و $z^U(w)$ به ϑ^U نزدیک‌تر هستند و این یعنی $\tilde{z}(w)$ به $\tilde{\vartheta}$ نزدیک‌تر است. بنابراین، مدل افکنش حد پایین[1] (*M-6.11*) و مدل افکنش حد بالا[2] (*M-6.12*) را به ترتیب تشکیل می‌دهیم:

$$\textbf{(M-6.11)} \quad \begin{cases} \max \Pr j_{\vartheta^L}(z^L(w)) = \sum_{i=1}^{n} z_i^L(w)\bar{\vartheta}_i^L \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

$$\textbf{(M-6.12)} \quad \begin{cases} \max \Pr j_{\vartheta^U}(z^U(w)) = \sum_{i=1}^{n} z_i^U(w)\bar{\vartheta}_i^U \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

به منظور مقایسه‌پذیر کردن گزینه‌ها، در فرآیند محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌ها روی گزینه‌ها، باید از بردار وزن یکسانی برای شاخصه‌ها استفاده کنیم. با توجه به اینکه مدلهای (*M-6.11*) و (*M-6.12*) دارای محدودیتهای یکسان هستند، از روش تجمیع وزنی برابر[3] (که قبلا معرفی شده) به منظور ترکیب مدلهای (*M-6.11*) و (*M-6.12*) استفاده می‌کنیم و مدل افکنش آمیخته[4] زیر را تشکیل می‌دهیم:

[1] Lower Limit Projection Model
[2] Upper Limit Projection Model
[3] Equally Weighted Summation Method
[4] Fused Projection Model

$$\textbf{(M-6.13)}\quad \begin{cases} \max\ \Pr\ j_{\tilde{\vartheta}}(z(w)) = \sum_{i=1}^{n} (z_i^L(w)\bar{\vartheta}_i^L + z_i^U(w)\bar{\vartheta}_i^U) \\ s.t. \quad w \in \Phi \end{cases}$$

با حل این مدل، جواب بهینه $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ را بدست می‌آوریم، سپس از معادله (۴–۱۵) برای محاسبه مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)(i=1, 2, ..., n)$ روی گزینه‌ها استفاده می‌کنیم.

به‌منظور رتبه‌بندی گزینه‌ها، از معادله (۴–۲) برای محاسبه درجات امکان بهره می‌گیریم و این کار را از طریق مقایسه اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i(w)$ انجام داده و نهایتاً ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم. سپس معادله (۴–۶) را برای بدست آوردن بردار اولویت ماتریس درجه امکان فوق به کار گرفته و بر مبنای بردار اولویت مذکور، گزینه‌ها را رتبه‌بندی و بهترین گزینه را انتخاب می‌کنیم.

بر اساس تحلیلهای فوق، در ادامه یک روش *MADM* با اعداد فاصله‌ای بر اساس مدل افکنش یا تصویر ارائه می‌کنیم که شامل گامهای زیر است:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، تصمیم‌گیرنده گزینه‌های $x_i\ (i=1, 2, ..., n)$ را نسبت به هر شاخصه $u_j(j=1, 2, ..., n)$ ارزیابی می‌کند و ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد. برای حل مسئله ابتدا این ماتریس را به ماتریس نرمال $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ تبدیل کنید. فرض کنید که تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌ها دارای ترجیحات ذهنی $\tilde{\vartheta}_i(i=1, 2, ..., n)$ است.

گام ۲) بردار وزنی $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ را با استفاده از مدل *(M-6.13)* بدست آورید. سپس، از معادله (۴–۱۵) برای بدست آوردن مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ روی گزینه‌های x_i استفاده کنید.

گام ۳) از معادله (۴–۲) برای محاسبه درجات امکان $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(w)\geq \tilde{z}_j(w))$ به ازای $(i, j=1, 2, ..., n)$ استفاده کرده و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ با بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ که بردار اولویت آن از معادله (۴–۶) بدست می‌آید را تشکیل دهید و در نهایت گزینه‌ها را بر حسب مقادیر بردار v رتبه‌بندی کنید.

٦-٥-٢ مثال کاربردی

مثال ٦-٥ یک مسئله $MADM$ را در نظر بگیرید که یک کمپانی سرمایه‌گذارِ ریسک‌پذیر برای انتخاب طرح سرمایه‌گذاری تصمیم‌گیری می‌کند. هم اینک برای این شرکت پنج پروژه (گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ وجود دارد که باید یکی از آنها انتخاب شود. تصمیم‌گیرنده، پروژه‌ها را از دیدگاه فاکتورهای ریسک (شاخصه‌ها) ارزیابی می‌کند. فاکتورهای ریسک در این مسئله به شش دسته تقسیم می‌شوند، (فن و همکاران، (٢٠٠٢)[1]) که عبارتند از: (١) u_1: ریسک بازار، (٢) u_2: ریسک فناوری، (٣) u_3: ریسک مدیریت، (۴) u_4: ریسک زیست‌محیطی، (۵) u_5: ریسک تولید و (۶) u_6: ریسک مالی. تمام شاخصه‌ها از جنس هزینه هستند. تصمیم‌گیرنده پروژه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5$ را نسبت به شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, ..., 6)$ با استفاده از مقیاس ۵ نمره‌ای ارزیابی می‌کند که عدد ١ نشان‌دهنده ریسک کمتر و عدد ۵ نشان‌دهنده بیشترین ریسک است. مقادیر ارزیابی در قالب اعداد فاصله‌ای $j=1, 2, ..., 6)$ $\tilde{a}_{ij}\,(i=1, 2, 3, 4, 5,$ بیان می‌شوند که مقادیر آنها همانطور که در جدول (۶-۹) قابل ملاحظه است، در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ فهرست شده‌اند:

جدول ٦-٩ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[2, 4]	[3, 4]	[2, 3]	[3, 4]	[2, 3]	[4, 5]
x_2	[3, 4]	[2, 3]	[4, 5]	[3, 4]	[2, 4]	[2, 3]
x_3	[2, 3]	[2, 3]	[4, 5]	[3, 4]	[2, 4]	[3, 5]
x_4	[3, 5]	[2, 4]	[2, 3]	[2, 5]	[3, 4]	[2, 3]
x_5	[4, 5]	[3, 4]	[2, 4]	[2, 5]	[3, 5]	[2, 4]

اطلاعات وزنی معلوم نیز به صورت زیر هستند:

[1] Fan et al. (2002)

$$\Phi = \Big\{ w = (w_1, w_2, ..., w_6) \,|\, 0.15 \le w_1 \le 0.18,\; 0.16 \le w_2 \le 0.17,\; 0.17 \le w_3 \le 0.18, \; 0.14 \le w_4 \le 0.19,\; 0.13 \le w_5 \le 0.16,\; 0.16 \le w_6 \le 0.20,\; \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \Big\}$$

اکنون از روش معرفی شده در بخش (۶–۵–۱) برای رتبه‌بندی پنج پروژه این مسئله استفاده می‌کنیم. گامهای روش مطرح شده را به ترتیب طی می‌کنیم:

گام ۱) ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ را با استفاده از معادله (۴–۱۴) نرمال می‌سازیم که حاصل آن ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$ است که در جدول (۶–۱۰) نمایش داده شده است:

جدول ۱۰-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.1304, 0.4054]	[0.1154, 0.2353]	[0.1667, 0.3797]
x_2	[0.1304, 0.2703]	[0.1538, 0.3529]	[0.1000, 0.1899]
x_3	[0.1739, 0.4054]	[0.1538, 0.3529]	[0.1000, 0.1899]
x_4	[0.1043, 0.2703]	[0.1154, 0.3529]	[0.1667, 0.3797]
x_5	[0.1043, 0.2027]	[0.1154, 0.2353]	[0.1250, 0.3797]

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.1250, 0.2899]	[0.1538, 0.3896]	[0.0960, 0.1899]
x_2	[0.1250, 0.2899]	[0.1154, 0.3896]	[0.1600, 0.3797]
x_3	[0.1250, 0.2899]	[0.1154, 0.3896]	[0.0960, 0.2532]
x_4	[0.1000, 0.4348]	[0.1154, 0.2597]	[0.1600, 0.3797]
x_5	[0.1000, 0.4348]	[0.0923, 0.2597]	[0.1200, 0.3797]

گام ۲) فرض کنید مقادیر ترجیحات ذهنی تصمیم‌گیرنده در مورد پروژه‌های $x_i\,(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ به صورت اعداد فاصله‌ای بیان شده باشد:

$$\tilde{\vartheta}_1 = [0.3, 0.5],\; \tilde{\vartheta}_2 = [0.5, 0.6],\; \tilde{\vartheta}_3 = [0.3, 0.4]$$

$$\tilde{\vartheta}_4 = [0.4,\ 0.6],\ \tilde{\vartheta}_5 = [0.4,\ 0.5]$$

بر اساس مدل (*M-6.13*) می‌توانیم مدل بهینه‌سازی تک هدفه زیر را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} \max \ \Pr\ j_{\tilde{\vartheta}}(\tilde{z}(w)) = 1.03050w_1 + 1.04992w_2 + 1.04411w_3 + 1.13063w_4 \\ \qquad\qquad\qquad + 1.09161w_5 + 1.09132w_6 \\ s.t. \quad 0.15 \le w_1 \le 0.18, \quad 0.16 \le w_2 \le 0.17, \quad 0.17 \le w_3 \le 0.18, \\ \qquad 0.14 \le w_4 \le 0.19, \quad 0.13 \le w_5 \le 0.16, \quad 0.16 \le w_6 \le 0.20, \ \sum_{j=1}^{6} w_j = 1 \end{cases}$$

با حل مدل، بردار وزن شاخصه‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w = (0.15,\ 0.16,\ 0.17,\ 0.19,\ 0.16,\ 0.17)$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ روی هر گزینه را با استفاده از معادله (۴–۱۵) بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(w) = [0.1310,\ 0.3127],\ \tilde{z}_2(w) = [0.1306,\ 0.3113]$$
$$\tilde{z}_3(w) = [0.1262,\ 0.3100],\ \tilde{z}_4(w) = [0.1271,\ 0.3503]$$
$$\tilde{z}_5(w) = [0.1095,\ 0.3213]$$

گام ٤) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w) \ge \tilde{z}_j(w))$ را با استفاده از معادله (۴–۲) بدست می‌آوریم و ماتریس درجات امکان را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5025 & 0.5103 & 0.4584 & 0.5164 \\ 0.4975 & 0.5 & 0.5092 & 0.4574 & 0.5154 \\ 0.4897 & 0.4908 & 0.5 & 0.4494 & 0.5068 \\ 0.5416 & 0.5426 & 0.5506 & 0.5 & 0.5536 \\ 0.4836 & 0.4846 & 0.4932 & 0.4464 & 0.5 \end{pmatrix}$$

که بردار اولویت ماتریس فوق با استفاده از معادله (۴–۶) به شکل زیر است:

$$v = (0.1994,\ 0.1990,\ 0.1968,\ 0.2094,\ 0.1954)$$

گام ۵) با استفاده از بردار اولویت v و ماتریس درجه امکان P، اعداد فاصله‌ای $\tilde{z}_i\,(w)$ که نشان‌دهنده مقادیر کلی شاخصه‌ها هستند را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\tilde{z}_4(w) \underset{0.5416}{\geq} \tilde{z}_1(w) \underset{0.5025}{\geq} \tilde{z}_2(w) \underset{0.5092}{\geq} \tilde{z}_3(w) \underset{0.5068}{\geq} \tilde{z}_5(w)$$

که بر اساس ترتیب فوق، ترتیب پروژه‌های x_i در این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$x_4 \underset{0.5416}{\succ} x_1 \underset{0.5025}{\succ} x_2 \underset{0.5092}{\succ} x_3 \underset{0.5068}{\succ} x_5$$

همانطور که مشاهده می‌کنید پروژه چهارم بهترین پروژه است.

٦-٦ تصمیم‌گیری چندشاخصه تعاملی با اعداد فاصله‌ای بر اساس سطح بهینگی[1]

١-٦-٦ روش تصمیم‌گیری

تعریف ٦-١ گیریم $\tilde{a}=[a^L, a^U]$ و $\tilde{b}=[b^L, b^U]$ دو عدد فاصله‌ای باشند؛ و نیز $p(\tilde{a}\geq\tilde{b})$ نشان‌دهنده احتمال $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ است (که در بخش (۴-۱) معرفی شد)؛ در این صورت $p(\tilde{a}\geq\tilde{b})\geq\beta$ سطح بهینگی $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ نامیده می‌شود.

قضیه ٦-٢ با سطح بهینگی β، می‌توان $\tilde{a}\geq\tilde{b}$ را به صورت زیر تبدیل نمود:

$$(1-\beta)a^L+\beta a^U \geq \beta b^L+(1-\beta)b^U \qquad (۶-۱۰)$$

که در آن $\beta\in[0,1]$ می‌باشد.

اثبات اگر معادله (۶-۱۰) معتبر باشد، آنگاه با توجه به $l_{\tilde{a}}=a^U-a^L$ و $l_{\tilde{b}}=b^U-b^L$ داریم:

---

[1] Optimization Level

$$\frac{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}} - (b^U - a^L)}{l_{\tilde{a}} + l_{\tilde{b}}} \geq \beta$$

معادله فوق به دنبال تعریف (۶-۱) بیان می‌شود که اگر $b^U - a^L \geq 0$، آنگاه $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \geq \beta$ می‌باشد؛ اگر $b^U - a^L < 0$ باشد آنگاه $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) = 1 \geq \beta$ ؛ در غیر اینصورت، اگر $p(\tilde{a} \geq \tilde{b}) \geq \beta$ باشد آنگاه به طور مشابه می‌توان اثبات کرد که معادله (۶-۱۰) نیز معتبر است و این اثبات را کامل می‌کند.

مشاهده می‌شود که هرچه مقادیر کل شاخصه‌های $\tilde{z}_i(w)$ که از معادله (۴-۱۵) بدست آمده است بزرگتر باشد، گزینه x_i متناظر آن نیز بهتر است. برای بدست آوردن گزینه بهینه، ابتدا لازم است مفهوم گزینه β -مغلوب[1] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶-۲ برای گزینه $x_p \in X$، اگر $x_q \in X$ و سطح بهینگی β وجود داشته باشد بطوری که $z_q^{(\beta)}(w) > z_p^{(\beta)}(w)$ آنگاه x_p گزینه β -مغلوب نامیده می‌شود؛ (توجه کنید که نامعادله حالت مساوی ندارد) در غیر اینصورت، x_p گزینه β -نامغلوب یا ناچیره[2] خوانده می‌شود، جاییکه دو مقدار:

$$z_p^{(\beta)}(w) = \sum_{j=1}^{m} \left[(1-\beta) r_{pj}^L + \beta r_{pj}^U \right] w_j$$

و

$$z_q^{(\beta)}(w) = \sum_{j=1}^{m} \left[(1-\beta) r_{qj}^L + \beta r_{qj}^U \right] w_j$$

را "مقادیر کلی شاخصه در سطح β " به ترتیب برای گزینه‌های x_p و x_q می‌نامند.

از تعریف (۶-۲) می‌دانیم که همواره در فرآیند بهینه‌سازی، گزینه β -مغلوب باید حذف شود که این امر باعث کوچک شدن مجموعه گزینه‌ها می‌شود. با استفاده از قضیه (۶-۲) و مشابه اثبات قضیه (۳-۱)، قضیه زیر را به سادگی اثبات می‌کنیم:

---

[1] β -dominated

[2] β -non-dominated

قضیه ۳-٦ برای اطلاعات وزنی جزئی معلوم Φ و سطح بهینگی پیش‌تعریف β، گزینه $x_p \in X$ گزینه β - مغلوب نامیده می‌شود اگر و تنها اگر $J_p < 0$ باشد، جائیکه داریم:

$$\begin{cases} J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} \left[(1-\beta) r_{qj}^L + \beta r_{qj}^U \right] w_j + \theta \right) \\ s.t.\ \sum_{j=1}^{m} \left[(1-\beta) r_{qj}^L + \beta r_{qj}^U \right] w_j + \theta \le 0,\ i \ne p,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ w \in \Phi \end{cases}$$

و θ متغیر کمکی آزاد در علامت است که هیچ معنایی ندارد. بنابراین، فقط نیاز است تا وضعیت هر گزینه را با استفاده از قضیه (۶-۳) شناسایی کرده و نهایتاً مجموعه $\bar{X}$ تایی از گزینه‌های β -نامغلوب را شکل دهیم جاییکه $\bar{X}$ زیرمجموعه‌ای از X است. بر اساس تحلیلهای فوق، روش $MADM$ با اعداد فاصله‌ای تعاملی به صورت زیر است:

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، مقادیر گزینه‌ها نسبت به شاخصه‌ها در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times m}$ قرار می‌گیرند. با استفاده از معادلات (۴-۹) و (۴-۱۰) یا (۴-۱۳) و (۴-۱۴)، ماتریس تصمیم غیرقطعی را نرمال کرده و به ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times m}$ برسید.

گام ۲) بر اساس سطح بهینگی پیش‌تعریف β، مقادیر کل شاخصه‌ها در سطح بهینگی β و اطلاعات جزئی در مورد وزن شاخصه‌ها و با استفاده از قضیه (۶-۳) تعیین کنید که گزینه x_i یک گزینه β - مغلوب است یا خیر؛ گزینه‌های β -مغلوب را حذف و سپس به مجموعه $\bar{X}$ برسید، که عناصر آن همگی گزینه‌های β -نامغلوب هستند. اگر بیشتر تصمیم‌گیرندگان پیشنهاد دهند که گزینه x_i از سایر گزینه‌های موجود در $\bar{X}$ برتر است یا گزینه x_i تنها گزینه باقیمانده در مجموعه $\bar{X}$ باشد، آنگاه بهترین گزینه همان x_i خواهد بود؛ در غیر اینصورت به گام بعد بروید.

گام ۳) با تصمیم‌گیرندگان تعامل کنید و اطلاعات تصمیم فراهم شده توسط تصمیم‌گیرندگان را به عنوان اطلاعات وزنی در مجموعه Φ در نظر بگیرید. اگر اطلاعات افزوده با اطلاعات موجود در Φ در تناقض بود، آنگاه اطلاعات را برای بازبینی مجدد به تصمیم‌گیرندگان دهید و به گام ۲ بروید.

فرآیند تعاملی فوق همگراست. با افزایش اطلاعات وزن، تعداد گزینه‌های β–نامغلوب در مجموعه $\bar{X}$ به تدریج کاهش می‌یابد. در نهایت، یا اکثر تصمیم‌گیرندگان پیشنهاد می‌دهند که یکی از گزینه‌های β–نامغلوب در $\bar{X}$ دارای بیشتری ترجیح است یا فقط یک گزینه β–نامغلوب در مجموعه $\bar{X}$ باقیمانده است و آن گزینه بهترین گزینه در نظر گرفته می‌شود.

توضیح ۱-٦ فرآیند تصمیم‌گیری فوق تنها به منظور یافتن بهترین گزینه استفاده می‌شود و برای رتبه‌بندی بین گزینه‌ها روش مناسبی نیست.

توضیح ۲-٦ تحقیقات در حوزه روشهای تصمیم‌گیری تعاملی گروهی برای مسائل *MADM* که در آنها وزن شاخصه‌ها و مقادیر شاخصه‌ها ناقص هستند، اخیراً توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌اند. به دلیل پیچیدگی در محاسبات، در اینجا نتایج این موضوع را بیان نمی‌کنیم. خوانندگانی که به این موضوع علاقمندند می‌توانند به این منابع[1] مراجعه کنند.

جدول ۱۱-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[8, 9]	[6, 7]	[8, 9]	[7, 8]
x_2	[5, 6]	[8, 10]	[6, 8]	[4, 5]
x_3	[7, 9]	[7, 8]	[5, 6]	[6, 7]
x_4	[5, 7]	[8, 9]	[9, 10]	[7, 8]
x_5	[7, 8]	[6, 8]	[7, 8]	[5, 7]

[1] Kim and Ahn (1997), (1999); Kim et al. (1999); Park et al. (1996); Park and Kim (1997); Salo (1995); Salo and Hämäläinen (2001); Xu and Chen (2007)

٦-٦-۲ مثال کاربردی

مثال ٦-٦ مسئولان یک دانشگاه در حال برنامه‌ریزی برای خرید کتابهایی در زمینه «آنالیز ریاضی» هستند، پنج نوع کتاب در این زمینه وجود است. برای انتخاب یکی از آنها، چهار شاخص ارزیابی (شاخصه) در نظر گرفته می‌شوند: (۱) u_1: کاربردی بودن، (۲) u_2: به روز بودن محتوا، (۳) u_3: کیفیت چاپ و ویرایش و (۴) u_4: قیمت. در میان شاخصه‌ها، شاخصه چهارم از جنس هزینه و مابقی شاخصه‌ها از جنس سود می‌باشند. مقادیر شاخصه‌ها در مقیاس ۱۰ نمره‌ای ارزیابی شده‌اند، از عدد ۱ به معنای بدترین و عدد ۱۰ به معنای بهترین است. اطلاعات تصمیم در ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ در جدول (۶-۱۱) فهرست شده‌اند:

اطلاعات وزنی معلوم نیز به صورت زیر هستند:

$$\Phi = \Big\{ w=(w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4)\,|\, 0.1 \le w_1 \le 0.45,\;\; w_2 \le 0.2,\; 0.1 \le w_3 \le 0.4\,,\;\; w_4 \ge 0.03\,,$$
$$\sum_{j=1}^{4} w_j = 1,\;\; w_j \ge 0,\;\; j=1,\,2,\,3,\,4 \Big\}$$

در ادامه، این مسئله را با روش معرفی شده در بخش (۶-۶-۱) حل می‌کنیم.

گام ۱) ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{A}$ را با استفاده از معادلات (۴-۱۳) و (۴-۱۴) نرمال می‌کنیم و ماتریس نرمال $\tilde{R}$ را بدست می‌آوریم که مقادیر آن در جدول (۶-۱۲) فهرست شده‌اند:

جدول ۱۲-٦ ماتریس تصمیم غیرقطعی نرمال $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.205, 0.281]	[0.143, 0.200]	[0.195, 0.257]	[0.144, 0.194]
x_2	[0.128, 0.188]	[0.190, 0.286]	[0.146, 0.229]	[0.230, 0.340]
x_3	[0.179, 0.281]	[0.167, 0.229]	[0.122, 0.171]	[0.164, 0.227]
x_4	[0.128, 0.219]	[0.190, 0.257]	[0.220, 0.286]	[0.144, 0.194]
x_5	[0.179, 0.250]	[0.143, 0.229]	[0.171, 0.229]	[0.164, 0.272]

گام ۲) از قضیه (۶-۳) برای شناسایی گزینه‌ها استفاده می‌کنیم: اگر سطح بهینگی $\beta = 0.7$ در نظر گرفته‌شده باشد، برای گزینه x_1، بر اساس قضیه (۶-۳)، می‌توانیم برنامه‌ریزی خطی زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} J_1 = \max(\theta_1 - \theta_2 + 0.2582w_1 + 0.1829w_2 + 0.2384w_3 + 0.1790w_4) \\ s.t.\ \ \theta_1 - \theta_2 + 0.1700w_1 + 0.2572w_2 + 0.2041w_3 + 0.3070w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.2504w_1 + 0.2104w_2 + 0.1563w_3 + 0.2081w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.1917w_1 + 0.2369w_2 + 0.2662w_3 + 0.1790w_4 \le 0 \\ \qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.2287w_1 + 0.2032w_2 + 0.2116w_3 + 0.2396w_4 \le 0 \\ \qquad 0.1 \le w_1 \le 0.45,\ \ 0.1 \le w_2 \le 0.3,\ \ 0.05 \le w_3 \le 1 \\ \qquad 0.1 \le \omega_4 \le 0.5,\ \sum_{j=1}^{4} \omega_j = 1,\ \ \omega_j \ge 0,\ \ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{cases}$$

با حل این مدل، مقدار $J_1 = 0.0284 > 0$ بدست می‌آید. به طور مشابه برای سایر گزینه‌ها نیز داریم:

$$J_2 = 0.0638 > 0\ ,\ \ J_3 = 0.0112 > 0\ ,\ \ J_4 = -0.0234 < 0\ ,\ \ J_5 = -0.0208 < 0$$

بنابراین، گزینه‌های چهارم و پنجم گزینه‌های β-مغلوب می‌باشد که باید حذف شوند حال مجموعه گزینه‌های اولیه مسئله به مجموعه $\bar{X} = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ با سه گزینه β-نامغلوب تقلیل می‌یابد. با تعامل با تصمیم‌گیرندگان نتیجه این می‌شود که تصمیم‌گیرندگان گزینه دوم را بر سایر گزینه‌ها ترجیح می‌دهند. بنابراین بهترین گزینه، گزینه دوم خواهد بود.

بخش سوم

روشها و کاربردهای تصمیم‌گیری چندشاخصه با عبارات زبانی

فصل هفتم

حل مسائل $MADM$ زبانی با اطلاعات نامعلوم اوزان

پیچیدگی و عدم قطعیت پدیده‌های واقعی و فازی بودن تفکر انسان منجر به تصمیم‌گیری با اطلاعات زبانی در بسیاری از شرایط دنیای واقعی شده است. به عنوان مثال، هنگام ارزیابی وضعیت «راحتی» یا «طراحی» یک خودرو، برچسبهای زبانی نظیر «خوب»، «عادی» و «ضعیف» معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین، برای ارزیابی سرعت یک خودرو، از برچسبهای زبانی همچون «خیلی سریع»، «سریع» و «کند» استفاده می‌شود. از اینرو، پژوهش در زمینه مسائل $MADM$ که در آنها ارزیابی اطلاعات گزینه‌ها با استفاده از برچسبهای زبانی ارائه می‌شود موضوع جالب توجهی است و تحقیقات زیادی نیز در این زمینه انجام شده است. در این فصل، به معرفی عملگرهای تجمیع و تلفیق اطلاعات زبانی از جمله: عملگر میانگین وزنی ترتیبی استنتاجی تعمیم‌یافته[1] ($GIOWA$)، عملگر میانگین وزنی ترتیبی توسعه‌یافته[2] ($EOWA$)، عملگر میانگین وزنی توسعه‌یافته[3] (EWA) و عملگر تجمیع و تلفیق پیوندی زبانی[4] (LHA) خواهیم پرداخت. همچنین، بر اساس عملگرهای تجمیع و تلفیق مذکور به معرفی مسائلی از حوزه $MADM$ می‌پردازیم که در آنها اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است و مقادیر شاخصه‌ها نیز در قالب

[1] Generalized Induced Ordered Weighted Averaging (GIOWA) Operator
[2] Extended Ordered Weighted Averaging (EOWA) Operator
[3] Extended Weighted Averaging (EWA) Operator
[4] Linguistic Hybrid Aggregation (LHA) Operator

برچسبهای زبانی بیان می‌شود. این مسائل را در قالب مثالهای کاربردی با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۷ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *GIOWA*

۱-۱-۷ عملگر میانگین وزنی ترتیبی استنتاجی تعمیم‌یافته (*GIOWA*)

تعریف ۱-۷ (فن لارهوفن و پدریچ، (۱۹۸۳)[1]) سه تایی مرتب $\hat{a}=[a^L, a^M, a^U]$ را در نظر بگیرید که در آن $0<a^L \le a^M \le a^U$ می‌باشد. در این حالت $\hat{a}$ را یک عدد فازی مثلثی می‌نامند که تابع عضویت آن به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mu_{\hat{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a^L}{a^M-a^L}, & a^L \le x \le a^M \\ \dfrac{x-a^U}{a^M-a^U}, & a^M \le x \le a^U \\ 0, & otherwise\end{cases}$$

برای راحتی بیشتر در مراحل بعدی، ابتدا دو قانون عملیاتی را در مورد اعداد مثلثی بیان می‌کنیم:

$$\hat{a} + \hat{b} = [a^L, a^M, a^U]+[b^L, b^M, b^U]=[a^L+b^L, a^M+b^M, a^U+b^U] \qquad (۱)$$

$$\beta\hat{a}=[\beta a^L, \beta a^M, \beta a^U] \quad \text{جاییکه} \quad \beta \ge 0 \qquad (۲)$$

تعریف ۲-۷ (یاگر، (۱۹۹۹)[2]) عملگر مبتنی بر تابع *IOWA* را عملگر میانگین وزنی ترتیبی استنتاجی[3] نامند، اگر داشته باشیم:

---

[1] Van Laarhoven and Pedrycz (1983)
[2] Yager (1999)
[3] Induced Ordered Weighted Averaging (IOWA)

$$IOWA_{\omega}(<\pi_1, a_1>, <\pi_2, a_2>, ..., <\pi_n, a_n>) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j$$

که بردار $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن عملگر *IOWA* و $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ است به ازای $\omega_j \in [0, 1]$.
همچنین، $<\pi_1, a_1>$ زوج عملگر *OWA* است، عبارت π_i متغیر استنتاجی یا القائی ترتیبی است و a_i متغیر نشانوند یا آرگومان است. b_j همان مقدار a_i از زوج $<\pi_i, a_i>$ است وقتی π_i عملاً jامین مقدار بزرگ در میان متغیرهای استنتاجی باشد.

در ادامه، عملگر *IOWA* تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم:

تعریف ۳-۷ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) فرض کنید داریم:

$$GIOWA_{\omega}(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, ..., <\xi_n, \pi_n, a_n>) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن عملگر *GIOWA* نامیده می‌شود و $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ به ازای مقادیر $\omega_j \in [0, 1]$است. سه‌تایی $<\xi_i, \pi_i, a_i>$ شامل سه جزء است، اولین جزء آن ξ_i نشاندهنده درجه اهمیت یا مشخصه دومین جزء سه‌تایی یعنی π_i است و خود دومین جزء این سه‌تایی یعنی π_i برای استنتاج یک ترتیب خاص از طریق اولین جزء ξ_i روی جزء سوم یعنی a_i است (که در نهایت همین جزءهای سوم هستند که تلفیق می‌شوند، یعنی دو جزء نخست کمک می کنند تا جزء سوم ترتیب یافته و سپس از طریق ضرب در اوزان، تلفیق شوند). در اینجا b_j برابر مقدار a_i برای عنصر دارای jامین مقدار بزرگ ξ_i است. در اینصورت تابع *GIOWA* عملگر میانگین وزنی ترتیبی استنتاجی تعمیم‌یافته (*GIOWA*) نامیده می‌شود. بخاطر نقشی که اجزاء سه‌تایی دارند، بعضا به هنگام بحث و تحلیل در مورد سه‌تائیهای $<\xi_i, \pi_i, a_i>$، از ξ_i به عنوان متغیر استنتاجی ترتیب مستقیم، از π_i به عنوان متغیر استنتاجی ترتیب غیرمستقیم و از a_i به عنوان متغیر نشانوند یاد می‌شود.

[1] Xu (2004f)

در حالت خاص، اگر $\xi_i = No.i$ به ازای هر $i=1, 2, ..., n$ باشد که $No.i$ موقعیت مرتب شده a_i است، آنگاه عملگر $GIOWA$، به عملگر WA تقلیل می‌یابد.

مثال ۱-۷ مجموعه‌ای از سه‌تائیهای $i=1, 2, 3$ $<\xi_i, \pi_i, a_i>$ را در نظر بگیرید:

$$<No.2,\ Johnson, 160> \quad <No.1,\ Brown,\ 70>$$
$$<No.4,\ Smith,\ 20> \quad <No.3,\ Anderson, 100>$$

با استفاده از جزء اول، سه‌تایی‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$<No.1,\ Brown,\ 70>,\ <No.2,\ Johnson, 160>$$
$$<No.3,\ Anderson, 100>,\ <No.4,\ Smith,\ 20>$$

با توجه به ترتیب موجود، ترتیب نشانوندها بصورت زیر استنتاج می‌شود:

$$b_1 = 70,\ b_2 = 160,\ b_3 = 100,\ b_4 = 20$$

اگر بردار وزن این فرآیند تلفیق $\omega = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$ باشد، آنگاه نشانوندها بصورت زیر تلفیق می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, <\xi_3, \pi_3, a_3>, <\xi_4, \pi_4, a_4>)\\
&\quad = GIOWA_\omega(<No.2,\ Johnson, 160>, <No.1,\ Brown,\ 70>,\\
&\quad <No.4,\ Smith,\ 20>, <No.3,\ Anderson, 100>)\\
&\quad = 0.1\times 70 + 0.2\times 160 + 0.3\times 100 + 0.4\times 20\\
&\quad = 77
\end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر دو سه‌تایی $<\xi_i, \pi_i, a_i>$ و $<\xi_j, \pi_j, a_j>$ وجود داشته باشند به قسمی‌که $\xi_i = \xi_j$ باشد، آنگاه می‌توان از سیاست جایگزینی نشانوندهای دو سه‌تایی به وسیله میانگین نشانوند $<\xi_i, \pi_i, \frac{a_i + a_j}{2}>$ و $<\xi_j, \pi_j, \frac{a_i + a_j}{2}>$ استفاده کرد (یاگر و فیلف، (۱۹۹۹)[1]). اگر k سه‌تایی دارای چنین شرایطی باشند، آنها را به وسیله میانگین نشانوندهایشان می‌توان به شکل فوق نوشت.

[1] Yager and Filev (1999)

در ادامه، به معرفی ویژگی‌های عملگر $GIOWA$ می‌پردازیم (ژوو، (۲۰۰۴)[1]):

قضیه ۱-۷ (جابجایی[2]) فرض کنید بردار $(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>)$ به عنوان هر بردار از نشانوندها و $(<\xi_1', \pi_1', a_1'>, <\xi_2', \pi_2', a_2'>, \ldots, <\xi_n', \pi_n', a_n'>)$ جایگشتی از آن باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>) \\ &\quad = GIOWA_\omega(<\xi_1', \pi_1', a_1'>, <\xi_2', \pi_2', a_2'>, \ldots, <\xi_n', \pi_n', a_n'>) \end{aligned}$$

قضیه ۲-۷ (یکپارچگی[3]) بردار $(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>)$ را به عنوان هر بردار از نشانوندها در نظر بگیرید؛ اگر به ازای هر i مقدار $a_i = a$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>) = a$$

قضیه ۳-۷ (پیوستگی[4]) فرض کنید بردار $(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>)$ و $(<\xi_1, \pi_1, \bar{a}_1>, <\xi_2, \pi_2, \bar{a}_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, \bar{a}_n>)$ به عنوان دو بردار از نشانوندها باشند؛ اگر به ازای هر i داشته باشیم $a_i \le \bar{a}_i$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>) \\ &\quad \le GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, \bar{a}_1>, <\xi_2, \pi_2, \bar{a}_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, \bar{a}_n>) \end{aligned}$$

قضیه ۴-۷ (کراندار بودن[5]) عملگر $GIOWA$ بین دو عملگر min و max قرار دارد، به عبارتی داریم:

$$\min_i\{a_i\} \le GIOWA_\omega(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, \ldots, <\xi_n, \pi_n, a_n>) \le \max_i\{a_i\}$$

---

[1] Xu (2004f)
[2] Commutativity
[3] Idempotency
[4] Monotonicity
[5] Bounded

قضیه ۵-۷ اگر $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n} \right)$ باشد، آنگاه عملگر $GIOWA$ متناظر با آن، یک عملگر میانگین است. به عبارتی داریم:

$$GIOWA_{\omega}(<\xi_1, \pi_1, a_1>, <\xi_2, \pi_2, a_2>, ..., <\xi_n, \pi_n, a_n>) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

قضیه ٦-۷ اگر به ازای هر i داشته باشیم $\xi_i = a_i$، آنگاه عملگر $GIOWA$ به عملگر OWA تقلیل می‌یابد. به عبارتی عملگر OWA یک حالت خاص از عملگر $GIOWA$ است.

قضیه ۷-۷ اگر به ازای هر i داشته باشیم $\pi_i = \xi_i$، آنگاه عملگر $GIOWA$ به عملگر $IOWA$ تقلیل می‌یابد؛ به عبارتی عملگر $IOWA$ یک حالت خاص از عملگر $GIOWA$ است.

۲-۱-۷ روش تصمیم‌گیری

(۱) در مواردی که فقط یک تصمیم‌گیرنده وجود دارد

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، دو مجموعه X و U را به ترتیب به عنوان مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. تصمیم‌گیرنده مقادیر ارزیابی r_{ij} روی گزینه‌های $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j \in U$ بیان می‌کند و ماتریس تصمیم زبانی $R = (r_{ij})_{n \times m}$، که در آن $r_{ij} \in S$ است، را تشکیل می‌دهد. همچنین مجموعه S با عناصر زیر:

$S =${متوسط، نسبتاً ضعیف، ضعیف، خیلی ضعیف، شدیدا ضعیف

عمیقا عالی، خیلی عالی، خوب، نسبتاً خوب، }

یک مجموعه عبارات زبانی باشد که اعداد فازی متناظر آنها به صورت زیر می‌باشند:

خیلی ضعیف $=[0.1, 0.2, 0.3]$	شدیدا ضعیف $=[0, 0.1, 0.2]$
نسبتاً ضعیف $=[0.3, 0.4, 0.5]$	ضعیف $=[0.2, 0.3, 0.4]$
نسبتاً خوب $=[0.5, 0.6, 0.7]$	متوسط $=[0.4, 0.5, 0.6]$

خیلی خوب $=[0.7, 0.8, 0.9]$ خوب $=[0.6, 0.7, 0.8]$

عمیقا خوب $=[0.8, 0.9, 1]$

که ترتیب اهمیت آنها به صورت زیر است:

شدیدا ضعیف $<$ خیلی ضعیف $<$ ضعیف $<$ نسبتاً ضعیف $<$ متوسط $<$ نسبتاً خوب $<$ خوب $<$ خیلی خوب $<$ عمیقا خوب

گام ۲) از عملگر $GIOWA$ برای تجمیع و تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ استفاده کنید و سپس مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(\omega)(i=1, 2, ..., n)$ را مطابق زیر حساب کنید:

$$z_i(\omega)=GIOWA_{\omega}(<r_{i1}, u_1, \hat{a}_{i1}>,<r_{i2}, u_2, \hat{a}_{i2}>, ...,<r_{im}, u_m, \hat{a}_{im}>)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j b_{ij}$$

که در آن $r_{ij}\in S$، $u_j\in U$ و $\hat{a}_{ij}$ عدد فازی مثلثی متناظر r_{ij} می‌باشند، همچنین، $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ بردار وزن عملگر $GIOWA$ است و $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$ به ازای $\omega_j\in[0, 1]$ می باشد. از طرفی $\hat{b}_{ij}$ برابر مقدار $\hat{a}_{il}$ در سه تایی $<r_{il}, \pi_l, \hat{a}_{il}>$ با j امین مقدار بزرگ $r_{il}(l=1, 2, ..., m)$ است.

گام ۳) از مقادیر $z_i(\omega)$ برای رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده کنید.

(۲) در مواردی که چندین تصمیم‌گیرنده وجود دارد

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، سه مجموعه X ، U و D را به ترتیب مجموعه گزینه‌ها، مجموعه شاخصه‌ها و مجموعه تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. تصمیم‌گیرنده $d_k\in D$ مقادیر ارزیابی $r_{ij}^{(k)}$ را روی گزینه‌های $x_i\in X$ با توجه به شاخصه‌های $u_j\in U$ فراهم می‌کند و ماتریس تصمیم زبانی $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را که در آن

$$r_{ij}^{(k)}\in S \quad i=1, 2, ..., n \quad j=1, 2, ..., m \quad k=1, 2, ..., t$$

است، تشکیل می‌دهد.

گام ۲) از عملگر $GIOWA$ به منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی زبان در i امین سطر ماتریس $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ استفاده کرده و سپس مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای گزینه‌های x_i را به ازای هر تصمیم‌گیرنده d_k محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} z_i^{(k)}(\omega) &= GIOWA_{\omega}(<r_{i1}^{(k)}, u_1, \hat{a}_{i1}^{(k)}>, <r_{i2}^{(k)}, u_2, \hat{a}_{i2}^{(k)}>, \ldots, <r_{im}^{(k)}, \pi_m, \hat{a}_{im}^{(k)}>) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \omega_j \hat{b}_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

که در آن $r_{ij}^{(k)}\in S$ ،$u_j\in U$ می‌باشد و $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ عدد فازی مثلثی متناظر $r_{ij}^{(k)}$ است. همچنین، $\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ بردار وزن عملگر $GIOWA$ است که در آن $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$، به ازای $\omega_j\in[0,1]$ است. از سویی، $\hat{b}_{ij}^{(k)}$ برابر مقدار $\hat{a}_{il}^{(k)}$ از سه‌تایی $<r_{il}^{(k)}, u_l, \hat{a}_{il}^{(k)}>$ با jامین مقدار بزرگ $r_{il}^{(k)}$ $l=1, 2, \ldots, m$ است.

گام ۳) عملگر $GIOWA$ را به منظور تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ $(k=1, 2, \ldots, t)$ برای هرگزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k به کار بگیرید:

$$\begin{aligned} z_i(\omega') &= GIOWA_{\omega'}(<z_i^{(1)}(\omega), d_1, \hat{a}_i^{(1)}>, <z_i^{(2)}(\omega), d_2, \hat{a}_i^{(2)}>, \ldots <z_i^{(t)}(\omega), d_t, \hat{a}_i^{(t)}>) \\ &= \sum_{k=1}^{t} \omega'_k \hat{b}_i^{(k)} \end{aligned}$$

که در آن $z_i^{(k)}(\omega)\in S$ ،$d_k\in D$ و نیز $\hat{a}_i^{(k)}$ عدد فازی مثلثی متناظر با $z_i^{(k)}(\omega)$ است. از سویی، $\omega'=(\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_t)$ بردار وزن عملگر $GIOWA$ است که $\sum_{k=1}^{t}\omega'_k=1$، به ازای $\omega'_k\in[0,1],\ k=1, 2, \ldots, t$ می‌باشد. همچنین، $\hat{b}_i^{(k)}$ برابر مقدار $\hat{a}_i^{(l)}$ از سه‌تایی $<z_i^{(l)}(\omega), d_l, \hat{a}_i^{(l)}>$ با kامین عنصر بزرگ از $z_i^{(l)}(\omega)$ است.

گام ٤) از $z_i(\omega')(i=1, 2, \ldots, n)$ به منظور رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده نمائید.

۳-۱-۷ مثال کاربردی

مثال ۲-۷ یک مسئله *MADM* را در نظر بگیرید که در آن مسئولان یک هلدینگ سرمایه‌گذاری ریسک‌پذیر درصدد انتخاب یک شرکت مناسب بمنظور سرمایه‌گذاری در یک پروژه با فناوری بالا هستند. چهار شرکت (گزینه‌ها) در این مسئله وجود دارند $x_i\,(i=1,2,3,4)$. برای ارزیابی این شرکتها از منظر قابلیتهایشان، مسئولان هلدینگ سرمایه‌گذاری چند شاخصه را در نظر می‌گیرند (سانگ و چن، (۱۹۹۹)[1]): (۱) u_1: قابلیت فروش، (۲) u_2: قابلیت مدیریت، (۳) u_3: ظرفیت تولید، (۴) u_4: توان فنی، (۵) u_5: ظرفیت مالی، (۶) u_6: توان تحمل ریسک و (۷) u_7: انسجام استراتژیک شرکت. سه تصمیم‌گیرنده خبره $d_k\,(k=1,2,3)$ هر شرکت را بر حسب شاخصه‌های مذکور ارزیابی کرده و ماتریس تصمیم زبانی را تشکیل می‌دهند. (جداول (۷-۱) تا (۷-۳) را ببینید):

جدول ۱-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	نسبتاً خوب	خیلی خوب	خیلی خوب	متوسط	نسبتاً خوب	خوب	خوب
x_2	خیلی خوب	خوب	متوسط	خوب	خیلی خوب	خوب	نسبتاً ضعیف
x_3	خوب	خوب	خیلی خوب	نسبتاً خوب	بسیار خوب	خیلی خوب	خوب
x_4	خوب	خوب	نسبتاً ضعیف	نسبتاً خوب	خیلی خوب	نسبتاً خوب	نسبتاً خوب

جدول ۲-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	نبستاً خوب	خوب	خیلی خوب	متوسط	خوب	خوب	عمیقا خوب
x_2	متوسط	نسبتاً خوب	متوسط	نسبتاً خوب	خوب	خوب	نسبتاً خوب
x_3	خیلی خوب	نسبتاً خوب	خوب	خوب	بسیار خوب	بسیار خوب	نسبتاً خوب
x_4	متوسط	نسبتاً خوب	متوسط	نسبتاً خوب	متوسط	نسبتاً خوب	نسبتاً ضعیف

[1] Song and Chen (1999)

جدول ۳-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	متوسط	خوب	خوب	نسبتاً خوب	خیلی خوب	خوب	خیلی خوب
x_2	خوب	نسبتاً خوب	نسبتاً خوب	خوب	متوسط	خوب	نسبتاً عیف
x_3	خوب	نسبتاً خوب	خوب	خوب	خوب	خیلی خوب	خوب
x_4	متوسط	نسبتاً خوب	نسبتاً ضعیف	نسبتاً خوب	متوسط	متوسط	نسبتاً خوب

حال از روشی که در بخش (۷-۱-۲) به معرفی آن پرداختیم برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم که شامل گام‌های زیر است:

گام ۱) فرض کنید $\omega = (0.2, 0.1, 0.15, 0.2, 0.1, 0.15, 0.1)$ باشد، حال از عملگر $GIOWA$ برای تجمیع و تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس R_k استفاده کرده و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای هر شرکت x_i که توسط هر تصمیم‌گیرنده d_k فراهم شده را محاسبه می‌کنیم. ابتدا مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌ها را برای هر گزینه که توسط تصمیم‌گیرنده d_1 فراهم شده را محاسبه می‌کنیم. از آنجاکه:

$r_{11}^{(1)}$ = متناسب، $r_{12}^{(1)}$ = خیلی خوب، $r_{13}^{(1)}$ = خیلی خوب، $r_{14}^{(1)}$ = نسبتاً خوب

$r_{15}^{(1)}$ = متناسب، $r_{16}^{(1)}$ = خوب، $r_{17}^{(1)}$ = خوب

بنابراین داریم:

$$r_{12}^{(1)} = r_{13}^{(1)} > r_{16}^{(1)} = r_{17}^{(1)} > r_{11}^{(1)} = r_{15}^{(1)} > r_{14}^{(1)}$$

با استفاده از مقیاس زبانی معرفی شده در بخش (۷-۱-۲)، اعداد فازی مثلثی متناظر $r_{1j}^{(1)}\,(j = 1, 2, \dots, 7)$ به شکل زیر می‌باشند:

$$\hat{a}_{11}^{(1)} = [0.5, 0.6, 0.7],\ \hat{a}_{12}^{(1)} = [0.7, 0.8, 0.9],\ \hat{a}_{13}^{(1)} = [0.7, 0.8, 0.9]$$
$$\hat{a}_{14}^{(1)} = [0.4, 0.5, 0.6],\ \hat{a}_{15}^{(1)} = [0.5, 0.6, 0.7],\ \hat{a}_{16}^{(1)} = [0.6, 0.7, 0.8]$$
$$\hat{a}_{17}^{(1)} = [0.6, 0.7, 0.8]$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\widehat{b}_{11}^{(1)}=\widehat{b}_{12}^{(1)}=\widehat{a}_{12}^{(1)}=\widehat{a}_{13}^{(1)}=[0.7,\,0.8,\,0.9]\,,$$
$$\widehat{b}_{13}^{(1)}=\widehat{b}_{14}^{(1)}=\widehat{a}_{16}^{(1)}=\widehat{a}_{17}^{(1)}=[0.6,\,0.7,\,0.8]$$
$$\widehat{b}_{15}^{(1)}=\widehat{b}_{16}^{(1)}=\widehat{a}_{11}^{(1)}=\widehat{a}_{15}^{(1)}=[0.5,\,0.6,\,0.7]$$
$$\widehat{b}_{17}^{(1)}=\widehat{a}_{14}^{(1)}=[0.4,\,0.5,\,0.6]$$

بنابراین، با استفاده از عملگر *GIOWA* و قوانین عملیاتی اعداد مثلثی فازی داریم:

$$z_1^{(1)}(\omega)=GIOWA_{\omega}(<r_{11}^{(1)},\,u_1,\,\widehat{a}_{11}^{(1)}>,<r_{12}^{(1)},\,u_2,\,\widehat{a}_{12}^{(1)}>,\,...,<r_{17}^{(1)},\,u_7,\,\widehat{a}_{17}^{(1)}>)$$
$$=\sum_{j=1}^{7}\omega_j\widehat{b}_{1j}^{(1)}=[0.6,\,0.7,\,0.8]=\text{خوب}$$

به طور مشابه داریم، $z_2^{(1)}(\omega)=$ خوب، $z_3^{(1)}(\omega)=$ خیلی خوب، $z_4^{(1)}(\omega)=$ نسبتاً خوب.

برای تصمیم‌گیرندگان دوم و سوم نیز داریم:

$z_1^{(2)}(\omega)=$ خوب، $z_2^{(2)}(\omega)=$ نسبتاً خوب، $z_3^{(2)}(\omega)=$ خیلی خوب، $z_4^{(2)}(\omega)=$ متناسب

$z_1^{(3)}(\omega)=$ خوب، $z_2^{(3)}(\omega)=$ نسبتاً خوب، $z_3^{(3)}(\omega)=$ خوب، $z_4^{(3)}(\omega)=$ متناسب

گام ۲) فرض کنید $\omega'=(0.3,\,0.5,\,0.2)$ باشد، آنگاه از عملگر *GIOWA* به منظور تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)(k=1,\,2,\,3,\,4)$ برای گزینه‌های x_i که توسط سه تصمیم‌گیرنده d_k فراهم شدند استفاده می‌کنیم و مقادیر کلی شاخصه‌های تجمعی $z_i(\omega')$ برای گزینه‌های x_i را محاسبه می‌کنیم:

$$z_1(\omega')=GIOWA_{\omega'}(<z_1^{(1)}(\omega),\,d_1,\,\widehat{a}_1^{(1)}>,<z_1^{(2)}(\omega),\,d_2,\,\widehat{a}_1^{(2)}>,<z_1^{(3)}(\omega),\,d_3,\,\widehat{a}_1^{(3)}>)=\text{خوب}$$

$$z_2(\omega')=GIOWA_{\omega'}(<z_2^{(1)}(\omega),\,d_2,\,\widehat{a}_2^{(1)}>,<z_2^{(2)}(\omega),\,d_2,\,\widehat{a}_2^{(2)}>,<z_2^{(3)}(\omega),\,d_3,\,\widehat{a}_2^{(3)}>)=\text{نسبتاً خوب}$$

$$z_3(\omega')=GIOWA_{\omega'}(<z_3^{(1)}(\omega),\,d_1,\,\widehat{a}_3^{(1)}>,<z_3^{(2)}(\omega),\,d_2,\,\widehat{a}_3^{(2)}>,<z_3^{(3)}(\omega),\,d_3,\,\widehat{a}_3^{(3)}>)=\text{خیلی خوب}$$

$$z_4(\omega')=GIOWA_{\omega'}(<z_4^{(1)}(\omega),\,d_4,\,\widehat{a}_4^{(1)}>,<z_4^{(2)}(\omega),\,d_4,\,\widehat{a}_4^{(2)}>,<z_4^{(3)}(\omega),\,d_4,\,\widehat{a}_4^{(3)}>)=\text{متناسب}$$

گام ۳) از مقادیر $z_i(\omega')$ برای رتبه‌بندی شرکت‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ استفاده می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$$

در نهایت نتیجه می‌شود که شرکت سوم بهترین شرکت برای سرمایه‌گذاری است.

۷-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر میانگین وزنی ترتیب‌دار زبانی ($LOWA$)

۷-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

تعریف ۷-٤ (ژوو، (۲۰۰۲)[1]) فرض کنید $LOWA: S^n \to S$ است. حال اگر داشته باشیم:

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\}$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن تابع $LOWA$ بوده و نیز $\omega_j \in S, \quad j = 1, 2, ..., n$ باشد. همچنین، b_j معادل jامین مقدار بزرگ از نشانوندهای $a_i\,(i=1, 2, ..., n)$ باشد، آنگاه تابع $LOWA$ یک عملگر زبانی OWA (یا عملگر $LOWA$) نامیده می‌شود که در آن S یک مقیاس زبانی است. به عنوان مثال:

$S=$ {عمیقا خوب[2]، خیلی خوب، خوب، نسبتاً خوب، متناسب، نسبتاً ضعیف، ضعیف، خیلی ضعیف، شدیدا ضعیف}

یا به شکلی دیگر داریم:

$S =$ {خیلی بالا، بالا، متوسط، پایین، خیلی پایین}

---

[1] Xu (2002d)

[2] بجای کلمه "عمیقاً خوب"می‌شود از معادلهایی همچون: در حد اعلا، عالی، بسیار عالی هم استفاده کرد اما شاید هماهنگی میان واژه‌ها کمی لطمه ببیند. منظور از هماهنگی آنست که همه واژه‌های مثبت موجود با افزودن یک سرکلمه به کلمه "خوب" درست شده‌اند.

در فصل نهم، ویژگیهای عملگر $LOWA$ را با جزئیات بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه، یک روش $MADM$ بر اساس عملگر $LOWA$ معرفی می‌شود (ژوو، (۲۰۰۲)[1]):

(۱) در مواردی که فقط یک تصمیم‌گیرنده وجود دارد

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، تصمیم‌گیرنده مقادیر ارزیابی زبانی r_{ij} گزینه‌های $x_i \in X$ را با توجه به شاخصه‌های $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس ارزیابی $R = (r_{ij})_{n\times m}$ را که در آن $r_{ij} \in S$ است تشکیل می‌دهد.

گام ۲) از عملگر $LOWA$ برای تلفیق اطلاعات ارزیابی iامین سطر از ماتریس ارزیابی $R = (r_{ij})_{n\times m}$ استفاده کرده و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(\omega)$ را برای هر گزینه x_i مطابق زیر بدست آورید:

$$z_i(\omega) = \max_j \min\{\omega_j, b_{ij}\},\ i = 1, 2, ..., n$$

همچنین $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ بردار وزن عملگر $LOWA$ است که در آن $\omega_j \in S,\ j = 1, 2, ..., m$ می‌باشد و نیز b_{ij} معادل j امین مقدار بزرگ $r_{ij}(j = 1, 2, ..., m)$ است.

گام ۳) از مقادیر $z_i(\omega)(i = 1, 2, ..., n)$ برای رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده نمائید.

(۲) در مواردی که چندین تصمیم‌گیرنده وجود دارند

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، فرض کنید تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقادیر ارزیابی زبانی $r_{ij}^{(k)}$ بر روی گزینه‌های x_i را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس تصمیم زبانی $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که $r_{ij}^{(k)} \in S$ است.

[1] Xu (2002d)

گام ۲) از عملگر $LOWA$ برای تجمیع و تلفیق اطلاعات ارزیابی در iامین سطر ماتریس $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ استفاده کنید و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ را برای گزینه‌های x_i نسبت به شاخصه‌های فراهم شده توسط تصمیم‌گیرنده d_k مطابق زیر محاسبه کنید:

$$z_i^{(k)}(\omega) = LOWA_{\omega}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) = \max_j \min\{\omega_j, b_{ij}^{(k)}\}$$

که در رابطه فوق $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ معادل بردار وزنی عملگر $LOWA$ با شرایط $\omega_j \in S$ می‌باشد. همچنین، $b_{ij}^{(k)}$ معادل jامین مقدار بزرگ از $r_{ij}^{(k)}(j=1, 2, ..., m)$ است.

گام ۳) از عملگر $LOWA$ به منظور تجمیع و تلفیق مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)(k=1, 2, ..., t)$ مربوط به گزینه‌های x_i که توسط تصمیم‌گیرندگان $d_k(k=1, 2, ..., t)$ برای بدست آوردن مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های گروهی $z_i(\omega')$ فراهم شده، به صورت زیر استفاده نمائید:

$$z_i(\omega') = LOWA_{\omega'}(z_i^{(1)}(\omega), z_i^{(2)}(\omega), ..., z_i^{(t)}(\omega)) = \max_k \min\{\omega_k', b_i^{(k)}\}$$

که $\omega' = (\omega_1', \omega_2', ..., \omega_t')$ بردار وزن عملگر $LOWA$ است و در این بردار $\omega_k' \in S, \quad k=1, 2, ..., t$ و $b_i^{(k)}$ برابر jامین مقدار بزرگ از $z_i^{(l)}(\omega)$ به ازای $l=1, 2, ..., t$ می‌باشد.

گام ٤) از مقادیر $z_i(\omega')(i=1, 2, ..., n)$ برای رتبه بندی و انتخاب گزینه‌ها استفاده کنید.

۲-۲-۷ مثال کاربردی

در ادامه، یک مسئله نظامی (لی و ژونگ، (۲۰۰۳)[1]) که از نوع مسائل $MAGDM$ است، را حل می‌کنیم.

مثال ۳-۷ سامانه آتشباری، سیستمی پویا است که با تخصیص و ترتیبِ مناسب سلاحهای گرم و متنوع تشکیل می‌شود. سامانه آتشباری یک یگان زرهی تانک در زمان دستور آتشِ فرمانده نقش مهمی را در

---

[1] Li and Zhong (2003a)

توزیع آتش در میدان نبرد بعهده دارد. ترتیب یا چینش شلیک آتش، اهمیت بسزایی در دستیابی به یک هدف مشخص دارد، که به توانایی دفاعی، انهدام دشمنان و پشتیبانی از افراد کمک می‌کند. گروهان سوم از یگان تانک در حال تدارک یک نبرد دفاعی در یک منطقه است و چهار پیشنهاد (گزینه‌ها) $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ برای فرمانده وجود دارند. شاخصه‌های ارزیابی به این شکل می‌باشند: (۱) u_1: اختفاء در پستی‌بلندیهای زمین، (۲) u_2: کاهش دامنه حرکت هواپیماهای دشمن، (۳) u_3: استتار و ایجاد موانع ایذایی، (۴) u_4: همکاری با نیروی آتش مشترک، (۵) u_5: ظرفیت دفاع هوایی، (۶) u_6: نزدیکی به استحکامات پدافندی، (۷) u_7: ظرفیت نزدیکی به جبهه دشمن و (۸) u_8: میزان محدودسازی برتری دشمن از نظر تجهیزات. مقادیر ارزیابی توسط سه تصمیم‌گیرنده روی گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, ..., 8)$ در قالب ماتریس تصمیم زبانی $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{4\times8}(k=1, 2, 3)$ فراهم شده‌اند. (جداول (۷-۴) تا (۷-۶)):

جدول ٤-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	بالا	خیلی بالا	خیلی بالا	متوسط
x_2	خیلی بالا	بالا	متوسط	بالا
x_3	بالا	بالا	خیلی بالا	متوسط
x_4	بالا	بالا	پایین	متوسط

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	بالا	بالا	خیلی بالا	بالا
x_2	خیلی بالا	بالا	بالا	بالا
x_3	خیلی بالا	خیلی بالا	بالا	خیلی بالا
x_4	خیلی بالا	متوسط	بالا	بالا

جدول ۵-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	متوسط	بالا	خیلی بالا	متوسط
x_2	بالا	متوسط	متوسط	متوسط
x_3	متوسط	متوسط	بالا	بالا
x_4	متوسط	متوسط	متوسط	متوسط
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	بالا	خیلی بالا	متوسط	بالا
x_2	خیلی بالا	بالا	خیلی بالا	متوسط
x_3	خیلی بالا	خیلی بالا	خیلی بالا	بالا
x_4	خیلی بالا	بالا	متوسط	متوسط

جدول ٦-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	متوسط	بالا	بالا	متوسط
x_2	بالا	متوسط	متوسط	خیلی بالا
x_3	خیلی بالا	بالا	بالا	بالا
x_4	متوسط	متوسط	پایین	متوسط
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	خیلی بالا	بالا	متوسط	بالا
x_2	بالا	متوسط	خیلی بالا	بالا
x_3	خیلی بالا	خیلی بالا	بالا	خیلی بالا
x_4	خیلی بالا	بالا	متوسط	متوسط

حال از روش ارائه شده در بخش (۷-۲-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم که شامل گامهای زیر است:

گام ۱) بردار وزن شاخصه‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$w =$ (متوسط، بالا، بالا، خیلی بالا، بالا، خیلی بالا، متوسط، متوسط)

از فرمول زیر به منظور تجمیع و تلفیق مقادیر شاخصه‌ها در i امین سطر ماتریس تصمیم زبانی R_k استفاده کرده و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ را برای هر گزینه x_i مطابق زیر بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
z_i^{(k)}(\omega) &= LOWA_{\omega}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{i8}^{(k)}) \\
&= \max_j \min\{\omega_j, b_{ij}^{(k)}\}(i=1, 2, 3, 4,\ k=1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

$$z_1^{(1)}(\omega) = very\ high,\quad z_2^{(1)}(\omega) = high,\quad z_3^{(1)}(\omega) = very\ high$$
$$z_4^{(1)}(\omega) = high,\ z_1^{(2)}(\omega) = high\ ,\ z_2^{(2)}(\omega) = high\ ,\ z_3^{(2)}(\omega) = very\ high$$
$$z_4^{(2)}(\omega) = medium,\quad z_1^{(3)}(\omega) = high,\quad z_2^{(3)}(\omega) = high$$
$$z_3^{(3)}(\omega) = very\ high,\ z_4^{(3)}(\omega) = medium$$

گام ۲) بردار (بالا، خیلی بالا، متوسط) = ω' را در نظر بگیرید. سپس، از عملگر *LOWA*:

$$z_i(\omega') = LOWA_{\omega'}(z_i^{(1)}(\omega), z_i^{(2)}(\omega), z_i^{(3)}(\omega)),\quad i=1, 2, 3, 4$$

برای تجمیع و تلفیق مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)(k=1, 2, 3)$ برای گزینه x_i که توسط تصمیم‌گیرندگان $d_k(k=1, 2, 3)$ فراهم شده است استفاده کرده و مقادیر را به مقادیر کل ارزیابی شاخصه‌های گروهی $z_i(\omega')$ تبدیل می‌کنیم:

$z_1(\omega') =$ بالا ، $z_2(\omega') =$ بالا ، $z_3(\omega') =$ خیلی بالا ، $z_4(\omega') =$ متوسط

گام ۳) گزینه‌های $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ را بر اساس مقادیر $z_i(\omega')(i=1, 2, 3, 4)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_1 \sim x_2 \succ x_4$$

که نشان می‌دهد طرح سوم، بهترین طرح پیشنهادی است.

دو روش فوق، ساده و سرراست بوده و برای استفاده در دنیای واقعی، کاربردی هستند. ولی این روشها تا حدی تقریبی بوده و ممکن است منجر به از دست رفتن اطلاعات تصمیم در خلال فرایند تلفیق و تجمیع گردند.

در آنچه در ادامه خواهید دید، دو روش کاربردی تصمیم‌گیری که هم راحت هستند و هم در مسیر اجرا، موجب ریزش اطلاعات نمی‌شوند را معرفی می‌کنیم. یعنی روش *MADM* بر اساس عملگر *EOWA* و روش *MADM* بر اساس دو عملگر *LHA* و *EOWA*.

۷-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه بر اساس عملگر *EOWA*

۷-۳-۱ عملگر *EOWA*

در یک مسئله *MADM* هنگامی که تصمیم‌گیرنده یک گزینه را به وسیله عبارات زبانی ارزیابی می‌کند، معمولاً به عبارات زبانی از پیش تعیین شده‌ای نیاز دارد. بنابراین، در اینجا مجموعه عبارات زبانی را بیان می‌کنیم (ژوو، (۲۰۰۵)[1]):

$$S = \{s_\alpha \mid \alpha = -L, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, L\}$$

معمولاً تعداد اعضاء مجموعه S عددی فرد است مثل ۳، ۵ و مانند آن، برای مثال می‌توانیم مجموعه عبارات زبانی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$S = \{s_{-1}, s_0, s_1\}$ = {پایین، متوسط، بالا}

[1] Xu (2005b)

$S = \{s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2\}$ = {خیلی خوب، خوب، متناسب، ضعیف، خیلی ضعیف}

$S = \{s_{-4}, ..., s_0, ..., s_4\}$

={عمیقا خوب، خیلی خوب، خوب، نسبتاً خوب، متناسب، نسبتاً ضعیف، ضعیف، خیلی ضعیف، شدیدا ضعیف}

در اینجا دو قاعده ضروری هستند که به شکل زیر می‌باشند:

(۱) مجموعه مرتب است: نامساوی $s_\alpha > s_\beta$ برقرار است اگر و تنها اگر $\alpha > \beta$

(۲) عملگر منفی‌سازی وجود دارد که به این صورت عمل می‌کند: $neg\ (s_\alpha) = s_{-\alpha}$

برای حفظ تمامی اطلاعات داده شده، مجموعه عبارات زبان گسسته $S = \{s_\alpha \mid \alpha = -L, ..., -1, 0, 1, ..., L\}$ را می‌توان به یک مجمو عه پیوسته ع بارات ز بانی $\bar{S} = \{s_\alpha \mid \alpha \in [-q, q]\}$ تبدیل کرد که در آن $q(q > L)$ یک عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ ا ست (ژوو، (۲۰۰۵)[1]). اگر $\alpha \in \{-L, ..., -1, 0, 1, ..., L\}$ آنگاه s_α را عبارت زبانی ا صلی[2] می‌نامیم؛ در غیر اینصورت، s_α را عبارت زبانی مجازی[3] می‌نامیم. مجموعه پیوسته عبارات زبانی $\bar{S}$ نیز در دو قاعده مذکور صدق می‌کند.

توضیح ۱-۷ در حالت کلی، تصمیم‌گیرنده از عبارات زبانی اصلی برای ارزیابی گزینه‌ها استفاده می‌کند و عبارات زبانی مجازی تنها در عملیات محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در ادامه، قوانین عملیاتی عبارات زبانی مطرح شده در این قسمت را بیان می‌کنیم:

تعریف ۵-۷ (ژوو، (۲۰۰۵)) دو مجموعه، s_α و $s_\beta \in \bar{S}$ و $y, y_1, y_2 \in [0, 1]$ را در نظر بگیرید. آنگاه داریم:

۱) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$

---

[1] Xu (2005b)
[2] Original Linguistic Label
[3] Virtual Linguistic Label

۲) $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha$

۳) $y s_\alpha = s_{y\alpha}$

۴) $y(s_\alpha \oplus s_\beta) = y s_\alpha \oplus y s_\beta$

۵) $(y_1 + y_2) s_\alpha = y_1 s_\alpha \oplus y_2 s_\alpha$

تعریف ٦-۷ (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) فرض کنید $EOWA: \bar{S}^n \to \bar{S}$ است، حال اگر داشته باشیم:

$$EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} = s_{\bar{\beta}} \qquad (۷-۱)$$

که در آن $\bar{\beta} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \beta_j$ است و همچنین، $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزنی عملگر $EOWA$ می‌باشد که در این بردار $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ به ازای $j = 1, 2, ..., n$ $\omega_j \in [0, 1],$ است و از طرفی، s_{β_j} معادل j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندها یا آرگومانهای $s_{\alpha_i}\ (i = 1, 2, ..., n)$ باشد، آنگاه با این شرایط، تابع $EOWA$ عملگر میانگین وزنی ترتیبی توسعه‌یافته نامیده می‌شود.

مثال ٤-۷ فرض کنید $\omega = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$، آنگاه:

$$EOWA_\omega(s_2, s_3, s_1, s_{-1}) = 0.2 \times s_3 \oplus 0.3 \times s_2 \oplus 0.1 \times s_1 \oplus 0.4 \times s_{-1} = s_{0.9}$$

عملگر $EOWA$ دارای خاصیتهای زیر است:

قضیه ۸-۷ (جابجایی) (ژوو، (۲۰۰۳)[2])

$$EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = EOWA_\omega(\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}, ..., \dot{s}_{\alpha_n})$$

که $(\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}, ..., \dot{s}_{\alpha_n})$ هر جایگشتی از یک مجموعه آرگومانهای زبانی $(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n})$ است.

اثبات گیریم

[1] Xu (2003b)
[2] Xu (2003b)

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n}$$
$$EOWA_{\omega}(\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}, ..., \dot{s}_{\alpha_n}) = \omega_1 \dot{s}_{\beta_1} \oplus \omega_2 \dot{s}_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n \dot{s}_{\beta_n}$$

از آنجاکه $(\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}, ..., \dot{s}_{\alpha_n})$ هر جایگشتی از $(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n})$ است، آنگاه به ازای $s_{\beta_j} = \dot{s}_{\beta_j}$ $j = 1, 2, ..., n$ است. بنابراین، داریم $EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = EOWA_{\omega}(\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}, ..., \dot{s}_{\alpha_n})$ که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۹-۷ (یکپارچگی) (ژوو، (۲۰۰۳)) اگر به ازای هر j داشته باشیم $s_{\alpha_j} = s_{\alpha}$، آنگاه:

$$\begin{aligned} EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &= \omega_1 s_{\alpha} \oplus \omega_2 s_{\alpha} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\alpha} \\ &= (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) s_{\alpha} \\ &= s_{\alpha} \end{aligned}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۰-۷ (پیوستگی) (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) اگر به ازای هر i داشته باشیم $s_{\alpha_i} \le s'_{\alpha_i}$، آنگاه:

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \le EOWA_{\omega}(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n})$$

اثبات

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n}$$
$$EOWA_{\omega}(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n}) = \omega_1 s'_{\beta_1} \oplus \omega_2 s'_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s'_{\beta_n}$$

از آنجاکه به ازای هر i داریم $s_{\alpha_i} \le s'_{\alpha_i}$، آنگاه $s_{\beta_i} \le s'_{\beta_i}$ است. بنابراین:

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \le EOWA_{\omega}(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n})$$

[1] Xu (2003b)

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۱-۷ (کرانداری) (ژوو، (۲۰۰۳))

$$\min_i\{s_{\alpha_i}\} \le EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \le \max_i\{s_{\alpha_i}\}$$

اثبات $\max_i\{s_{\alpha_i}\} = s_\beta$ و $\min_i\{s_{\alpha_i}\} = s_\alpha$ را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\begin{aligned} EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &\le \omega_1 s_\beta \oplus \omega_2 s_\beta \oplus \cdots \oplus \omega_n s_\beta \\ &= (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) s_\beta \\ &= s_\beta \\ EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &\ge \omega_1 s_\alpha \oplus \omega_2 s_\alpha \oplus \cdots \oplus \omega_n s_\alpha \\ &= (\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n) s_\alpha \\ &= s_\alpha \end{aligned}$$

و بنابراین $\min_i\{s_{\alpha_i}\} \le EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \le \max_i\{s_{\alpha_i}\}$ که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۲-۷ (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) اگر $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ باشد، آنگاه عملگر $EOWA$ به عملگر EA تقلیل می‌یابد. به عبارتی:

$$EOWA_\omega(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = s_{\bar{\alpha}}$$

که $\bar{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ است.

اثبات از آنجاکه $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ می‌باشد، آنگاه

---

[1] Xu (2003b)

$$\begin{aligned} EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &= \frac{1}{n}(s_{\beta_1} \oplus s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus s_{\beta_n}) \\ &= \frac{1}{n}(s_{\alpha_1} \oplus s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus s_{\alpha_n}) \\ &= s_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۳-۷ (ژوو، (۲۰۰۳)[۱]) اگر $\omega = (1, 0, ..., 0)$ باشد، آنگاه عملگر *EOWA* به عملگر *max* تقلیل می‌یابد. به عبارتی:

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \max_i\{s_{\alpha_i}\}$$

اثبات از آنجاکه $\omega = (1, 0, ..., 0)$ است، درنتیجه داریم:

$$\begin{aligned} EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &= s_{\beta_1} = \max_i\{s_{\alpha_i}\} \end{aligned}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۴-۷ (ژوو، (۲۰۰۳)) اگر $\omega = (0, 0, ..., 1)$ باشد، آنگاه عملگر *EOWA* به عملگر *min* تقلیل می‌یابد. یعنی:

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \min_i\{s_{\alpha_i}\}$$

از آنجاکه $\omega = (0, 0, ..., 1)$ است، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &= s_{\beta_n} = \min_i\{s_{\alpha_i}\} \end{aligned}$$

---

[1] Xu (2003b)

که اثبات کامل می‌شود.

در حالت کلی‌تر اگر به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $\omega_i = 0$ و $\omega_j = 1$، آنگاه داریم:

$$EOWA_{\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = s_{\beta_j}$$

که s_{β_j} برابر jامین مقدار بزرگ مجموعه آرگومانهای $s_{\alpha_i}\ (i=1, 2, ..., n)$ است.

۲-۳-۷ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش $MADM$ بر اساس عملگر $EOWA$ معرفی می‌کنیم که شامل گامهای زیر است (ژوو، (۲۰۰۳)[۱]):

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، تصمیم گیرنده مقادیر ارزیابی زبانی r_{ij} را برای گزینه‌های $x_i \in X$ با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j \in U$ بیان می‌کند و ماتریس تصمیم زبانی $R = (r_{ij})_{n \times m}$ و $r_{ij} \in S$ را تشکیل می‌دهد.

گام ۲) از علگر $EOWA$ برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از ماتریس $R = (r_{ij})_{n \times m}$ استفاده کنید و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i(\omega)$ را مطابق زیر بدست آورید:

$$z_i(\omega) = EOWA_{\omega}(r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{im})$$

گام ۳) با توجه به مقادیر $z_i(\omega)\ (i=1, 2, ..., n)$ گزینه‌های $x_i\ (i=1, 2, ..., n)$ را رتبه‌بندی و سپس انتخاب نمائید.

[1] Xu (2003b)

جدول ۷-۷ ماتریس تصمیم زبانی R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_2	s_0	s_0	s_0	s_3	s_3	s_4
x_2	s_3	s_0	s_{-2}	s_0	s_3	s_4	s_3	s_2
x_3	s_2	s_3	s_4	s_4	s_2	s_2	s_2	s_3
x_4	s_4	s_3	s_3	s_0	s_3	s_0	s_3	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_0	s_2	s_2	s_0	s_{-1}
x_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_0
x_3	s_2	s_0	s_{-1}	s_3	s_2	s_2	s_2
x_4	s_0	s_3	s_0	s_2	s_0	s_3	s_2

۷-۳-۳ مثال کاربردی

مثال ۷-۵ به منظور ارزیابی عملکرد مدیریت دانش در چهار شرکت $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ در یک منطقه اقتصادی خاص، پانزده مشخصه در نظر گرفته شده است (هوانگ، (۲۰۰۱)[1]): (۱) u_1: سود مشتری، (۲) u_2: درجه رضایتمندی مشتری، (۳) u_3: سهم مشتریان بزرگ، (۴) u_4: فروش هر مشتری، (۵) u_5: نسبت نرخ تکرار سفارشات و سهم نرخ مشتریان وفادار، (۶) u_6: سرمایه‌گذاری ساختار داخلی، (۷) u_7: میزان سرمایه‌گذاری برای فناوری اطلاعات، (۸) u_8: سهم نرخ حمایت از کارکنان، (۹) u_9: نرخ گردش کل کارکنان، (۱۰) u_{10}: صلاحیت کارکنان پشتیبان، (۱۱) u_{11}: طول خدمت کارمندان بخش دانش، (۱۲) u_{12}: سطح تحصیلات کارکنان، (۱۳) u_{13}: نرخ دانش کارکنان، (۱۴) u_{14}: سرانه سود کارکنان دانشی و (۱۵) u_{15}: صلاحیت کارکنان دانشی. عبارات زبانی استفاده شده برای ارزیابی شرکت‌های $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j (j=1, 2, .., 15)$ به صورت زیر هستند:

$S=\{s_{-4}, ..., s_0, ..., s_4\}=\{$ شدیدا ضعیف، خیلی ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف، متوسط،

[1] Huang (2001)

{عمیقا خوب، خیلی خوب، خوب، نسبتاً خوب،

و همچنین مقادیر ارزیابی در ماتریس R نشان داده‌شده است (جدول(۷-۷)).

از عملگر $EOWA$ به منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی در i امین سطرح ماتریس تصمیم زبانی R استفاده کرده و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i(\omega)$ برای هر شرکت x_i را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید بردار وزن عبارات زبانی به صورت زیر است:

$$\omega = (0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.16, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03))$$

مقادیر $z_i(\omega)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
z_1(\omega) &= 0.03\times s_4 \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.06\times s_2 \oplus 0.07\times s_2 \oplus 0.08\times s_2 \\
&\oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.16\times s_2 \oplus 0.09\times s_0 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.07\times s_0 \\
&\oplus 0.06\times s_0 \oplus 0.05\times s_0 \oplus 0.04\times s_0 \oplus 0.03\times s_{-1} = s_{1.28} \\
z_2(\omega) &= 0.03\times s_4 \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.07\times s_2 \oplus 0.08\times s_0 \\
&\oplus 0.09\times s_0 \oplus 0.16\times s_0 \oplus 0.09\times s_0 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.07\times s_0 \\
&\oplus 0.06\times s_{-1} \oplus 0.05\times s_{-1} \oplus 0.04\times s_{-1} \oplus 0.03\times s_{-2} = s_{0.62} \\
z_3(\omega) &= 0.03\times s_4 \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.07\times s_3 \oplus 0.08\times s_2 \\
&\oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.16\times s_2 \oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.08\times s_2 \oplus 0.07\times s_2 \\
&\oplus 0.06\times s_2 \oplus 0.05\times s_2 \oplus 0.04\times s_0 \oplus 0.03\times s_{-1} = s_{2.05} \\
z_4(\omega) &= 0.03\times s_4 \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.07\times s_3 \oplus 0.08\times s_3 \\
&\oplus 0.09\times s_3 \oplus 0.16\times s_3 \oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.08\times s_2 \oplus 0.07\times s_0 \\
&\oplus 0.06\times s_0 \oplus 0.05\times s_0 \oplus 0.04\times s_0 \oplus 0.03\times s_0 = s_{2.11}
\end{aligned}$$

حال از مقادیر $z_i(\omega)(i=1, 2, 3, 4)$ برای رتبه‌بندی گزینه‌های $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ به صورت نزولی استفاده می‌کنیم:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$$

بنابراین بهترین گزینه، شرکت چهارم است.

۷-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه بر اساس عملگرهای *EOWA* و *LHA*

۷-٤-۱ عملگر *EWA*

تعریف ۷-۷ (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) $EWA:\ \bar{S}^n \to \bar{S}$ است. حال اگر داشته باشیم:

$$EWA_w(s_{\alpha_1},\, s_{\alpha_2},\, ...,\, s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n} = s_{\bar{\alpha}} \qquad (۷-۲)$$

که $\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} w_j \alpha_j$ به ازای $w = (w_1,\, w_2,\, ...,\, w_n)$، بردار وزن عبارات زبانی $s_{\alpha_j}\ (j = 1, 2, ..., n)$ می‌باشد و دارای خصوصیات $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$، $w_j \in [0, 1],\quad j = 1, 2, ..., n$ و $s_{\alpha_j} \in \bar{S}$ باشد، آنگاه در اینصورت تابع *EWA*، عملگر میانگین وزن‌دار توسعه یافته نامیده می‌شود.

در حالت خاص، اگر $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ باشد آنگاه تابع *EWA* به عملگر میانگین توسعه‌یافته[2] تقلیل می‌یابد.

مثال ۷-٦ فرض کنید $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ باشد، در اینصورت داریم:

$$EWA_w(s_2,\, s_3,\, s_1,\, s_{-1}) = 0.2 \times s_2 \oplus 0.3 \times s_3 \oplus 0.1 \times s_1 \oplus 0.4 \times s_{-1} = s_1$$

عملگر *EWA* دارای ویژگیهای زیر است:

قضیه ۷-۱۵ (کرانداری) (ژوو، (۲۰۰۳))

$$\min_i\{s_{\alpha_i}\} \le EWA_w(s_{\alpha_1},\, s_{\alpha_2},\, ...,\, s_{\alpha_n}) \le \max_i\{s_{\alpha_i}\}$$

---

[1] Xu (2003b)
[2] Extended Averaging (EA) Operator

اثبات $\max_i\{s_{\alpha_i}\} = s_\beta$ و $\min_i\{s_{\alpha_i}\} = s_\alpha$ را در نظر بگیرید، آنگاه:

$$\begin{aligned} EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n} \\ &= w_1 s_\beta \oplus w_2 s_\beta \oplus \cdots \oplus w_n s_\beta \\ &= s_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n} \\ &\geq w_1 s_\alpha \oplus w_2 s_\alpha \oplus \cdots \oplus w_n s_\alpha \\ &= s_\alpha \end{aligned}$$

بنابراین، $\min_i\{s_{\alpha_i}\} \leq EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \leq \max_i\{s_{\alpha_i}\}$ که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۶-۷ (یکپارچگی) (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) اگر به ازای هر j داشته باشیم $s_{\alpha_j} = s_\alpha$ آنگاه:

$$EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = s_\alpha$$

اثبات از آنجاکه به ازای هر j داریم $s_{\alpha_j} = s_\alpha$، آنگاه:

$$\begin{aligned} EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n} \\ &= w_1 s_\alpha \oplus w_2 s_\alpha \oplus \cdots \oplus w_n s_\alpha \\ &= (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) s_\alpha \\ &= s_\alpha \end{aligned}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱۷-۷ (پیوستگی) (ژوو، (۲۰۰۳)) اگر به ازای هر i داشته باشیم $s_{\alpha_i} \leq s'_{\alpha_i}$، آنگاه:

$$EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \leq EWA_w(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n})$$

اثبات دو رابطه زیر را در نظر بگیرید

[1] Xu (2003b)

$$EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n}$$
$$EWA_w(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n}) = w_1 s'_{\alpha_1} \oplus w_2 s'_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s'_{\alpha_n}$$

از آنجاکه به ازای هر i داریم $s_{\alpha_i} \le s'_{\alpha_i}$، آنگاه:

$$EWA_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) \le EWA_w(s'_{\alpha_1}, s'_{\alpha_2}, ..., s'_{\alpha_n})$$

که اثبات کامل می‌شود.

از تعاریف (۷-۵) و (۷-۶) می‌بینیم که عملگر *EWA* فقط وزن عبارات زبانی را محاسبه می‌کند، و عملگر *EOWA* تنها وزن موقعیتهای مرتب شده عبارات زبانی (و نه وزن خود عبارات زبانی) را محاسبه می‌کند. بنابراین، هر دو عملگر *EWA* و *EOWA* دارای نقطه ضعف هستند. برای غلبه بر این محدودیت، در ادامه یک عملگر تجمیع پیوندی زبانی[1] (*LHA*) را معرفی خواهیم کرد.

۷-٤-۲ عملگر *LHA*

تعریف ۷-۸ (ژوو، (۲۰۰۳)[2]) گیریم $LHA: \bar{S}^n \to \bar{S}$ باشد، حال اگر داشته باشیم:

$$LHA_{w,\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n}$$

که $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ بردار وزنی (بردار موقعیت) عملگر *LHA* است و در آن $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$، به ازای $w_j \in [0, 1]$ بوده و همچنین، s_{β_j} معادل j امین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندهای وزنی $(\bar{s}_{\alpha_1}, \bar{s}_{\alpha_2}, ..., \bar{s}_{\alpha_n})$ باشد، آنگاه تابع فوق، عملگر تلفیق پیوندی زبانی (*LHA*) نامیده می‌شود. در اینجا $\bar{s}_{\alpha_i} = n w_i s_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$، به ازای $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$، بردار وزنی عبارات زبانی

[1] Linguistic Hybrid Aggregation (LHA) Operator
[2] Xu (2003b)

$s_{\alpha_i}\,(i=1, 2, ..., n)$ است که در آن $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$، به ازای $w_j \in [0, 1]$ می‌باشد. همچنین، n ضریب متعادل‌سازی است.

مثال ۷-۷ فرض کنید $s_{\alpha_1} = s_2$، $s_{\alpha_2} = s_3$، $s_{\alpha_3} = s_1$ و $s_{\alpha_4} = s_{-1}$ یک مجموعه از عبارات زبانی باشد و $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ نیز بردار وزن آنها باشد، $\omega = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ بردار وزن عملگر LHA است. طبق تعریف (۷-۷) داریم:

$$\bar{s}_{\alpha_1} = 4\times 0.2\times s_2 = s_{1.6}\,,\ \bar{s}_{\alpha_2} = 4\times 0.3\times s_3 = s_{3.6}$$
$$\bar{s}_{\alpha_3} = 4\times 0.1\times s_1 = s_{0.4}\,,\ \bar{s}_{\alpha_4} = 4\times 0.4\times s_{-1} = s_{-1.6}$$

آنگاه:

$$s_{\beta_1} = s_{3.6}\,,\ s_{\beta_2} = s_{1.6}\,,\ s_{\beta_3} = s_{0.4}\,,\ s_{\beta_4} = s_{-1.6}$$

و بنابراین:

$$LHA_{w,\omega}(s_2, s_3, s_1, s_{-1}) = 0.2\times s_{3.6} \oplus 0.2\times s_{1.6} \oplus 0.3\times s_{0.4} \oplus 0.3\times s_{-1.6} = s_{6.8}$$

قضیه ۷-۱۸ (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) عملگر EWA حالت خاصی از عملگر LHA است.

اثبات $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\begin{aligned} LHA_{w,\omega}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\beta_1} \oplus \omega_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\beta_n} \\ &= \frac{1}{n}\,(s_{\beta_1} \oplus s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus s_{\beta_n}) \\ &= w_1 s_{\alpha_1} \oplus w_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\alpha_n}) \\ &= s_{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

که $\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} w_j \alpha_j$ است و اثبات کامل می‌شود.

---

[1] Xu (2003b)

قضیه ۷-۱۹ (ژوو، (۲۰۰۳)[1]) عملگر $EOWA$ حالت خاصی از عملگر LHA است.

اثبات فرض کنید $w=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ باشد، آنگاه $\bar{s}_{\alpha_i}=s_{\alpha_i}\ (i=1, 2, ..., n)$ است، که اثبات کامل می‌شود.

از قضایای (۷-۱۸) و (۷-۱۹) می‌دانیم که عملگر LHA هر دو عملگر EWA و $EOWA$ را پوشش می‌دهد. به عبارتی، نه‌تنها درجه اهمیت عبارات زبانی را در نظر می‌گیرد، بلکه موقعیت ترتیب آنها را نیز در نظر می‌گیرد.

۷-۴-۳ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش $MADM$ بر اساس عملگرهای $EOWA$ و LHA را معرفی می‌کنیم که دارای گامهای زیر است:

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است. t تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1, 2, ..., t)$ با بردار وزن $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$، که در آن $\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$، $\lambda_k\geq 0,\quad k=1, 2, ..., t$ است، وجود دارند. تصمیم‌گیرنده $d_k\in D$ مقادیر ارزیابی زبانی $r_{ij}^{(k)}$ خود بر روی گزینه‌های $x_i\in X$ را با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j\in U$ بیان می‌کند و ماتریس تصمیم زبانی $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ و $r_{ij}^{(k)}\in S$ را تشکیل می‌دهد.

گام ۲) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطرح ماتریس $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را با استفاده از عملگر $EOWA$ تلفیق کنید و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای گزینه‌های x_i را متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k بدست آورید:

$$z_i^{(k)}(\omega)=EOWA_{\omega}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)})\,,\ i=1, 2, ..., n\ \ ,\ k=1, 2, ..., t$$

[1] Xu (2003b)

گام ۳) از عملگر LHA برای تلفیق مقادیر شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ که به ازای t تصمیم‌گیرنده d_k بدست آمده را روی گزینه‌های x_i اعمال و مقادیر $z_i(\omega')$ را برای گزینه x_i بدست آورید:

$$z_i(\lambda, \omega') = LHA_{\lambda,\omega'}(z_i^{(1)}(\omega), z_i^{(2)}(\omega), ..., z_i^{(t)}(\omega))$$
$$= \omega_1' b_i^{(1)} \oplus \omega_2' b_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \omega_t' b_i^{(t)},\ i = 1, 2, ..., n$$

که $\omega' = (\omega_1', \omega_2', ..., \omega_t')$ بردار وزن عملگر LHA می‌باشد و در آن $\sum_{k=1}^{t} \omega_k' = 1$ و $\omega_k' \in [0, 1]$ به ازای $k = 1, 2, ..., t$ می‌باشد. همچنین، $b_i^{(k)}$ معادل kامین مقدار بزرگ از مجموعه نشانوندهای زبانی وزن‌دار[1] $(t\lambda_1 z_i^{(1)}(\omega), t\lambda_2 z_i^{(2)}(\omega), ..., t\lambda_t z_i^{(t)}(\omega))$ است و نیز t برابر ضریب متعادل‌سازی[2] است.

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(\lambda, \omega')$ رتبه‌بندی و بهترین گزینه را انتخاب کنید.

جدول ۸-۷ ماتریس تصمیم زبانی R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_1	s_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_4	s_3	s_4
x_2	s_3	s_0	s_{-2}	s_1	s_3	s_4	s_4	s_0
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3
x_4	s_4	s_3	s_4	s_0	s_3	s_0	s_2	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_1	s_0	s_2	s_3	s_0	s_{-1}
x_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_1
x_3	s_2	s_1	s_0	s_3	s_2	s_3	s_2
x_4	s_0	s_4	s_0	s_2	s_{-1}	s_3	s_2

[1] Weighted Linguistic Arguments
[2] Balancing Coefficient

۷-٤-٤ مثال کاربردی

مثال ۸-۷ در اینجا از مثال (۷-۵) برای روشن شدن روش معرفی شده در بخش (۷-۴-۳) استفاده می‌کنیم. فرض کنید اطلاعات ارزیابی زبانی توسط سه تصمیم‌گیرنده $d_k(k=1, 2, 3)$ با بردار وزن $\lambda=(0.3, 0.4, 0.3)$ در ماتریسهای تصمیم زبانی R_k فهرست شده‌باشد (جداول (۷-۸) تا (۷-۹)).

جدول ۷-۹ ماتریس تصمیم زبانی R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_3	s_1	s_{-1}	s_0	s_1	s_3	s_2	s_3
x_2	s_4	s_0	s_{-2}	s_1	s_3	s_4	s_3	s_3
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_4	s_2	s_3
x_4	s_4	s_2	s_3	s_0	s_2	s_0	s_3	s_4

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_3	s_0	s_{-2}
x_2	s_{-1}	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_0	s_1
x_3	s_3	s_0	s_{-1}	s_3	s_4	s_2	s_3
x_4	s_0	s_3	s_1	s_2	s_0	s_4	s_0

جدول ۷-۱۰ ماتریس تصمیم زبانی R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_0	s_0	s_2	s_3	s_2	s_4
x_2	s_3	s_0	s_0	s_0	s_3	s_4	s_3	s_4
x_3	s_2	s_2	s_4	s_3	s_2	s_1	s_2	s_3
x_4	s_4	s_3	s_4	s_0	s_3	s_1	s_3	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_0	s_3	s_2	s_0	s_{-2}
x_2	s_{-1}	s_0	s_1	s_{-1}	s_0	s_0	s_0
x_3	s_3	s_0	s_{-1}	s_3	s_1	s_2	s_4
x_4	s_{-2}	s_3	s_2	s_2	s_2	s_3	s_2

در ادامه گامهای این روش تصمیم‌گیری را با جزئیات بیشتر می‌پیماییم:

گام ۱) از عملگر $EOWA$ به منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطرح از ماتریس تصمیم R استفاده می‌کنیم و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ که توسط تصمیم‌گیرنده d_k فراهم شده را برای گزینه x_i محاسبه می‌کنیم. فرض کنید داشته باشیم:

$$\omega = (0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.16, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05, 0.04, 0.03)$$

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(\omega) &= 0.03\times s_4 \oplus 0.04\times s_4 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.07\times s_2 \oplus 0.08\times s_2 \\ &\oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.16\times s_1 \oplus 0.09\times s_1 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.07\times s_0 \\ &\oplus 0.06\times s_0 \oplus 0.05\times s_0 \oplus 0.04\times s_{-1} \oplus 0.03\times s_{-1} = s_{1.27} \end{aligned}$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$z_2^{(1)}(\omega) = s_{0.55},\ z_3^{(1)}(\omega) = s_{2.39},\ z_4^{(1)}(\omega) = s_{2.01},\ z_1^{(2)}(\omega) = s_{1.25}$$

$$z_2^{(2)}(\omega) = s_{0.78},\ z_3^{(2)}(\omega) = s_{2.62},\ z_4^{(2)}(\omega) = s_{1.87},\ z_1^{(3)}(\omega) = s_{1.53}$$

$$z_2^{(3)}(\omega) = s_{0.83},\ z_3^{(3)}(\omega) = s_{2.12},\ z_4^{(3)}(\omega) = s_{2.40}$$

گام ۲) از عملگر LHA (با فرض $\omega' = (0.2, 0.6, 0.2)$) برای تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ که توسط سه تصمیم‌گیرنده d_k فراهم شده برای گزینه‌های x_i استفاده می‌کنیم: ابتدا از $\lambda,\ t$ و $z_i^{(k)}(\omega)$ برای محاسبه $t\lambda_k z_i^{(k)}(\omega)$ استفاده می‌کنیم:

$$3\lambda_1 z_1^{(1)}(\omega) = s_{1.143},\ 3\lambda_1 z_2^{(1)}(\omega) = s_{0.495},\ 3\lambda_1 z_3^{(1)}(\omega) = s_{2.151}$$

$$3\lambda_1 z_4^{(1)}(\omega) = s_{1.809},\ 3\lambda_2 z_1^{(2)}(\omega) = s_{1.500},\ 3\lambda_1 z_2^{(2)}(\omega) = s_{0.936}$$

$$3\lambda_2 z_3^{(2)}(\omega) = s_{3.144},\ 3\lambda_2 z_4^{(2)}(\omega) = s_{2.244},\ 3\lambda_3 z_1^{3)}(\omega) = s_{1.377}$$

$$3\lambda_3 z_2^{(3)}(\omega) = s_{0.747},\ 3\lambda_3 z_3^{(3)}(\omega) = s_{1.908},\ 3\lambda_3 z_4^{3)}(\omega) = s_{2.160}$$

حال می‌توان مقادیر کلی شاخصه‌های گروهی $z_i(\lambda, \omega')(i=1, 2, 3, 4)$ را بدست آورد:

$$z_1(\lambda, \omega') = 0.2 \times s_{1.500} \oplus 0.6 \times s_{1.143} \oplus 0.2 \times s_{1.377} = s_{1.4040}$$

$$z_2(\lambda, \omega') = 0.2 \times s_{0.936} \oplus 0.6 \times s_{0.747} \oplus 0.2 \times s_{0.495} = s_{0.7344}$$

$$z_3(\lambda, \omega') = 0.2 \times s_{3.144} \oplus 0.6 \times s_{2.151} \oplus 0.2 \times s_{1.908} = s_{2.300}$$

$$z_4(\lambda, \omega') = 0.2 \times s_{2.244} \oplus 0.6 \times s_{2.160} \oplus 0.2 \times s_{1.809} = s_{2.1066}$$

گام ۳) گزینه‌های x_i را بر حسب مقادیر $z_i(\lambda, \omega')$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2$$

بنابراین، شرکت سوم بهترین شرکت است.

فصل هشتم

حل مسائل *MADM* زبانی با اطلاعات حقیقی یا نامعلوم اوزان

در این فصل، برای حل آن دسته از مسائل *MADM* که در آنها وزن شاخصه‌ها کاملاً معلوم بوده و مقادیر شاخصه‌ها با عبارات یا برچسبهای زبانی بیان می‌شوند، روش *MADM* مبتنی بر عملگر *EWA* و نیز روش *MADM* مبتنی بر عملگرهای *EWA* و *LHA* را معرفی کرده و از آنها به منظور حل مسئله تصمیم‌گیری در مورد سیستم اطلاعات مدیریت یک شرکت استفاده می‌کنیم. در حل مسائل *MAGDM* با اطلاعات زبانی، با مشکلی مواجه هستیم که از آن بعنوان دانه‌بندی[1] واژه‌های زبانی یاد می‌کنند که علت آن تفاوت در عادات فکری تصمیم‌گیرندگان است. برای حل این مشکل، مفهومی تحت عنوان "روابط تبدیل عبارات زبانی چنددانه‌ای یا چنداندازه‌ای[2] (*TRMLLs*)" را معرفی خواهیم کرد، که از آن بمنظور اعمال تغییرات در عبارات زبانی با دانه‌بندی متفاوت برای دستیابی به مجموعه عبارات زبانی با دانه‌بندی ثابت استفاده می‌گردد. برای درک بهتر عملکرد *TRMLL*ها، یک مثال کاربردی در حوزه ارزیابی و مقایسه توان علمی و پژوهشی اساتید دانشگاه تشریح خواهد شد. بعلاوه مفهوم عبارات زبانی دو بُعدی[3] را به منظور دستیابی به دقت بالاتر و پرهیز از نتایج جانبدارانه در *MADM* زبانی معرفی می‌کنیم. در ادامه، روابط بین عبارات زبانی دو بعدی و عبارات زبانی معمولی را تحلیل کرده و سپس به کمّی‌سازی یک عبارت زبانی دو بعدی

---

[1] Granularity
[2] Transformation Relationships Among Multigranular Linguistic Labels (TRMLLs)
[3] 2-Dimension Linguistic Label

مشخص با استفاده از اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته[1] می‌پردازیم. همچنین، بر اساس یک تابع نگاشت که عبارات زبانی دو بعدی را به اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظرش و نیز تابع معکوس آن نگاشت می‌کند، عملگر میانگین وزنی زبانی دو بعدی[2] (*2DLWA*) و عملگر میانگین وزنی مرتب زبانی دو بعدی[3] (*2DLOWA*) را معرفی می‌کنیم. در نهایت، به ذکر مثالی پیرامون انتخاب بهترین پایان‌نامه‌های تحصیلات تکمیلی خواهیم پرداخت تا عملکرد این دو روش تلفیق عبارات زبانی دو بعدی را نشان دهیم.

۸-۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه بر اساس عملگر *EWA*

۸-۱-۱ روش تصمیم‌گیری

در این بخش، به معرفی یک روش *MADM* مبتنی بر عملگر *EWA* می‌پردازیم که گامهای آن به صورت زیر است:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، فرض کنید X و U به ترتیب مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها باشند. تصمیم‌گیرنده مقادیر ارزیابی خود از گزینه‌های x_i نسبت به شاخصه‌های u_j (همان r_{ij}) را در ماتریسهای تصمیم زبانی $R=(r_{ij})_{n\times m}$ و $r_{ij}\in S$ بیان می‌کند.

گام ۲) از عملگر *EWA* برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ به منظور بدست آوردن مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i(w)$ استفاده نمائید:

$$
\begin{aligned}
z_i(w) &= EWA_w(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \\
&= w_1 r_{i1} \oplus w_2 r_{i2}, \oplus \cdots \oplus w_m r_{im},\ \ i=1, 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

---

[1] Generalized Triangular Fuzzy Number (TFN)
[2] Two Dimension Linguistic Weighted Averaging (2DLWA) Operator
[3] Two Dimension Linguistic Ordered Weighted Averaging (2DLOWA) Operator

که در آن $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ بردار وزن شاخصه‌ها می‌باشد.

گام ۳) از مقادیر $z_i(w)$ برای رتبه‌بندی و انتخاب گزینه‌های x_i استفاده کنید.

۲-۱-۸ مثال کاربردی

مثال ۱-۸ شاخصه‌های بکار رفته برای ارزیابی سیستم اطلاعات مدیریت[1] عمدتاً به این صورت هستند (گوا و ونگ، (۲۰۰۰)[2]): (۱) u_1: پشتیبانی از رهبری، (۲) u_2: قابلیت توسعه، (۳) u_3: قابلیت نگهداری، (۴) u_4: بهره‌وری منابع، (۵) u_5: امنیت، (۶) u_6: اقتصادی بودن، (۷) u_7: به‌هنگام بودن، (۸) u_8: کاربرپسند بودن، (۹) u_9: کاربردی بودن، (۱۰) u_{10}: سطح خدمات، (۱۱) u_{11}: سطح به اشتراک‌گذاری، (۱۲) u_{12}: نقش هدایتگری، (۱۳) u_{13}: اهمیت، (۱۴) u_{14}: سود، (۱۵) u_{15}: میزان اطلاعات.

در ادامه، شاخصه‌های فوق را برای ارزیابی سیستم‌های اطلاعات مدیریت در چهار شرکت (گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$) به کار می‌گیریم. فرض کنید مجموعه عبارات زبانی به صورت زیر است:

$S=\{s_{-4}, ..., s_0, ..., s_4\}$
= {شدیداً ضعیف، خیلی ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف ، متوسط ،
نسبتاً خوب، خوب، خیلی خوب، عمیقاً خوب}

اطلاعات ارزیابی در ماتریس R موجود در جدول (۸-۱) نشان داده شد. همچنین، بردار وزن شاخصه‌ها به صورت زیر در مسئله داده شده است:

$$w=(0.07, 0.08, 0.06, 0.05, 0.09, 0.07, 0.04, 0.06, 0.05, 0.08, 0.09, 0.06, 0.04, 0.09, 0.07)$$

[1] Management Information Systems
[2] Guo and Wang (2000)

جدول ۱-۸ ماتریس تصمیم زبانی R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_3	s_1	s_0	s_2	s_0	s_4	s_4	s_4
x_2	s_3	s_2	s_1	s_1	s_3	s_2	s_3	s_2
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3
x_4	s_2	s_3	s_4	s_0	s_3	s_1	s_3	s_4
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_3	s_0	s_0	s_3	s_2	s_0	s_1	
x_2	s_1	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_1	s_1	
x_3	s_2	s_0	s_0	s_3	s_4	s_2	s_0	
x_4	s_0	s_3	s_1	s_2	s_1	s_3	s_2	

حال از عملگر EWA برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در iامین سطر ماتریس تصمیم زبانی R استفاده می‌کنیم و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z_1(w) = {} & 0.07\times s_3 \oplus 0.08\times s_1 \oplus 0.06\times s_0 \oplus 0.05\times s_2 \oplus 0.09\times s_0 \oplus 0.07\times s_3 \\ & \oplus 0.04\times s_4 \oplus 0.06\times s_4 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.09\times s_0 \\ & \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.04\times s_2 \oplus 0.09\times s_0 \oplus 0.07\times s_1 = s_{1.48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2(w) = {} & 0.07\times s_3 \oplus 0.08\times s_2 \oplus 0.06\times s_1 \oplus 0.05\times s_1 \oplus 0.09\times s_3 \oplus 0.07\times s_2 \\ & \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.06\times s_2 \oplus 0.05\times s_1 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.09\times s_0 \\ & \oplus 0.06\times s_{-1} \oplus 0.04\times s_{-1} \oplus 0.09\times s_1 \oplus 0.07\times s_1 = s_{1.24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3(w) = {} & 0.07\times s_2 \oplus 0.08\times s_3 \oplus 0.06\times s_4 \oplus 0.05\times s_3 \oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.07\times s_2 \\ & \oplus 0.04\times s_4 \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.05\times s_2 \oplus 0.08\times s_0 \oplus 0.09\times s_0 \\ & \oplus 0.06\times s_3 \oplus 0.04\times s_4 \oplus 0.09\times s_2 \oplus 0.07\times s_0 = s_{2.05} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4(w) = {} & 0.07\times s_2 \oplus 0.08\times s_3 \oplus 0.06\times s_4 \oplus 0.05\times s_0 \oplus 0.09\times s_3 \oplus 0.07\times s_1 \\ & \oplus 0.04\times s_3 \oplus 0.06\times s_4 \oplus 0.05\times s_0 \oplus 0.08\times s_3 \oplus 0.09\times s_1 \\ & \oplus 0.06\times s_2 \oplus 0.04\times s_1 \oplus 0.09\times s_3 \oplus 0.07\times s_2 = s_{2.22} \end{aligned}$$

بر اساس مقادیر فوق، گزینه‌های $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$$

همانطور که مشخص است شرکت چهارم از منظر سیستم اطلاعات مدیریت از سایر شرکت‌ها بهتر است.

۸-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی بر اساس عملگرهای *EWA* و *LHA*

۸-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، به معرفی روش *MAGDM* مبتنی بر عملگرهای *EWA* و *LHA* می‌پردازیم که گامهای آن به شرح زیر است:

گام ۱) در یک مسئله *MAGDM*، بردار وزن شاخصه‌ها برابر $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ است که در آن $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ و $w_j \geq 0$ می‌باشد. بردار وزن تصمیم‌گیرندگان $d_k(k=1, 2, ..., t)$ نیز برابر $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است که در آن $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$، به ازای $\lambda_k \geq 0$ می‌باشد. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقادیر ارزیابی زبانی $r_{ij}^{(k)}$ را در مورد گزینه $x_i \in X$ با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j \in U$ بیان می‌کند و ماتریس تصمیم زبانی $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد.

گام ۲) از عملگر *EWA* برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس R_k استفاده کرده و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ را بدست آورید:

$$\begin{aligned} z_i^{(k)}(w) &= EWA_w(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) \\ &= w_1 r_{i1}^{(k)} \oplus w_2 r_{i2}^{(k)} \oplus \cdots \oplus w_m r_{im}^{(k)}, \; i=1, 2, ..., n, \; k=1, 2, ..., t \end{aligned}$$

گام ۳) عملگر LHA را برای تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ که توسط تصمیم‌گیرندگان d_k در مورد گزینه‌های x_i بیان شده را به کار گرفته و سپس مقادیر کلی شاخصه‌های گروهی $z_i(\lambda, \omega)$ را بدست آورید:

$$z_i(\lambda, \omega) = LHA_{\lambda,\omega}(z_i^{(1)}(w), z_i^{(2)}(w), ..., z_i^{(t)}(w))$$

$$= \omega_1 b_i^{(1)} \oplus \omega_2 b_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \omega_t b_i^{(t)}, \; i = 1, 2, ..., n$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزن عملگر LHA است و نیز $\sum_{k=1}^{t} \omega_k = 1$ به ازای $\omega_k \in [0, 1]$ است. همچنین، $b_i^{(k)}$ معادل k امین مقدار بزرگ از مجموعه آرگومانها و یا نشانوندهای زبانی وزن‌دار $(t\lambda_1 z_i^{(1)}(w), t\lambda_2 z_i^{(2)}(w), ..., t\lambda_t z_i^{(t)}(w))$ بوده و t ضریب متعادل‌ساز[1] است.

گام ٤) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(\lambda, \omega)$ به صورت نزولی رتبه‌بندی کرده، سپس بهترین گزینه را انتخاب نمائید.

۸-۲-۲ مثال کاربردی

مثال ۲-۸ اکنون به تشریح روش ارائه شده در بخش (۸-۳) با استفاده از مثال (۸-۱) می‌پردازیم. فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده $d_k (t = 1, 2, 3)$ با بردار وزن $\lambda = (0.3, 0.4, 0.3)$ به منظور تصمیم‌گیری در مسئله حضور دارند. آنها اطلاعات ارزیابی خود را از سیستمهای اطلاعات مدیریت $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j (j = 1, 2, ..., 15)$ بیان کرده و اطلاعات ارزیابی را در ماتریسهای تصمیم R_k طرح می‌کنند که در جداول (۸-۲) تا (۸-۴) نشان داده شده است.

[1] Balancing Coefficient

جدول ۲-۸ ماتریس تصمیم زبانی R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_3	s_{-1}	s_0	s_2	s_3	s_4	s_4
x_2	s_4	s_0	s_{-1}	s_1	s_4	s_4	s_4	s_0
x_3	s_3	s_4	s_4	s_3	s_2	s_3	s_4	s_4
x_4	s_4	s_3	s_3	s_1	s_3	s_0	s_3	s_3
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_2	s_1	s_2	s_1	s_3	s_1	s_0	
x_2	s_2	s_0	s_1	s_{-1}	s_1	s_0	s_2	
x_3	s_2	s_1	s_0	s_4	s_2	s_3	s_1	
x_4	s_2	s_4	s_1	s_2	s_0	s_3	s_3	

جدول ۳-۸ ماتریس تصمیم زبانی R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_3	s_2	s_1	s_1	s_2	s_3	s_2	s_1
x_2	s_3	s_1	s_0	s_1	s_3	s_4	s_3	s_3
x_3	s_3	s_4	s_2	s_3	s_2	s_4	s_1	s_3
x_4	s_3	s_2	s_3	s_1	s_2	s_0	s_3	s_4
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_2	s_2	s_1	s_2	s_2	s_1	s_{-1}	
x_2	s_{-1}	s_0	s_{-1}	s_0	s_0	s_1	s_2	
x_3	s_2	s_0	s_0	s_2	s_4	s_3	s_2	
x_4	s_1	s_3	s_1	s_2	s_0	s_2	s_4	

جدول ٤-۸ ماتریس تصمیم زبانی R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_0	s_0	s_2	s_3	s_1	s_4
x_2	s_2	s_0	s_1	s_0	s_2	s_4	s_3	s_4
x_3	s_2	s_3	s_3	s_3	s_2	s_1	s_2	s_4
x_4	s_3	s_3	s_4	s_0	s_3	s_2	s_3	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_1	s_0	s_3	s_3	s_0	s_{-1}
x_2	s_0	s_0	s_2	s_{-1}	s_0	s_2	s_0
x_3	s_3	s_1	s_{-1}	s_3	s_3	s_2	s_3
x_4	s_0	s_3	s_2	s_3	s_2	s_4	s_3

بردار وزنی شاخصه‌ها در مسئله به صورت زیر است:

$$w = (0.07, 0.08, 0.06, 0.05, 0.05, 0.09, 0.07, 0.04, 0.06, 0.05, 0.08, \\ 0.09, 0.06, 0.04, 0.09, 0.07)$$

در ادامه، این مسئله را با روش معرفی شده در بخش (۸-۲-۱) حل خواهیم می‌کنیم:

گام ۱) از عملگر EWA به‌منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از ماتریس R_k استفاده نموده و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ برای هر سیستم اطلاعات مدیریت x_i موجود در مسئله را به ازای هر تصمیم‌گیرنده d_k بدست می‌آوریم:

$$z_1^{(1)}(w) = 0.07 \times s_2 \oplus 0.08 \times s_3 \oplus 0.06 \times s_{-1} \oplus 0.05 \times s_0 \oplus 0.09 \times s_2 \oplus 0.07 \times s_3 \\ \oplus 0.04 \times s_4 \oplus 0.06 \times s_4 \oplus 0.05 \times s_2 \oplus 0.08 \times s_1 \oplus 0.09 \times s_2 \\ \oplus 0.06 \times s_1 \oplus 0.04 \times s_3 \oplus 0.09 \times s_1 \oplus 0.07 \times s_0 = s_{1.74}$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$z_2^{(1)}(w) = s_{1.38}, \ z_3^{(1)}(w) = s_{2.55}, \ z_4^{(1)}(w) = s_{2.43}$$

$$z_1^{(2)}(w)=s_{1.58}\,,\ z_2^{(2)}(w)=s_{1.28}\,,\ z_3^{(2)}(w)=s_{2.18}\,,\ z_4^{(2)}(w)=s_{2.01}$$
$$z_1^{(3)}(w)=s_{1.54}\,,\ z_2^{(3)}(w)=s_{1.32}\,,\ z_3^{(3)}(w)=s_{2.11}\,,\ z_4^{(3)}(w)=s_{2.65}$$

گام ۲) از عملگر *LHA*، با فرض اینکه بردار وزن به صورت $\omega=(0.2,\,0.6,\,0.2)$ باشد، برای تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ برای هر یک از گزینه‌های x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1,\,2,\,3)$ استفاده می‌کنیم. به‌عبارتی، ابتدا از $\lambda,\,t$ و $z_i^{(k)}(w)$ برای حل $t\lambda_k z_i^{(k)}(w)$ استفاده می‌کنیم:

$$3\lambda_1 z_1^{(1)}(w)=s_{1.566}\,,\ 3\lambda_1 z_2^{(1)}(w)=s_{1.242}\,,\ 3\lambda_1 z_3^{(1)}(w)=s_{2.295}$$
$$3\lambda_1 z_4^{(1)}(w)=s_{2.187}\,,\ 3\lambda_2 z_1^{(2)}(w)=s_{1.896}\,,\ 3\lambda_1 z_2^{(2)}(w)=s_{1.536}$$
$$3\lambda_2 z_3^{(2)}(w)=s_{2.616}\,,\ 3\lambda_2 z_4^{(2)}(w)=s_{2.412}\,,\ 3\lambda_3 z_1^{(3)}(w)=s_{1.386}$$
$$3\lambda_3 z_2^{(3)}(w)=s_{1.188}\,,\ 3\lambda_3 z_3^{(3)}(w)=s_{1.899}\,,\ 3\lambda_3 z_4^{(3)}(w)=s_{2.385}$$

از این رو، مقادیر کلی شاخصه‌های گروهی $z_i(\lambda,\,\omega)$ برای سیستمهای اطلاعات مدیریت x_i به صورت زیر است:

$$z_1(\lambda,\,\omega)=0.2\times s_{1.896}\oplus 0.6\times s_{1.566}\oplus\ 0.2\times s_{1.386}=s_{1.5960}$$
$$z_2(\lambda,\,\omega)=0.2\times s_{1.536}\oplus 0.6\times s_{1.242}\oplus\ 0.2\times s_{1.188}=s_{1.2900}$$
$$z_3(\lambda,\,\omega)=0.2\times s_{2.616}\oplus 0.6\times s_{2.295}\oplus\ 0.2\times s_{1.899}=s_{2.2800}$$
$$z_4(\lambda,\,\omega)=0.2\times s_{2.412}\oplus 0.6\times s_{2.385}\oplus\ 0.2\times s_{2.187}=s_{2.3508}$$

گام ۳) سیستمهای اطلاعات مدیریت x_i را طبق مقادیر بدست آمده $z_i(\lambda,\,\omega)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_4\succ x_3\succ x_1\succ x_2$$

که با توجه به رتبه‌بندی فوق، مشخص می‌شود که گزینه چهارم بهترین گزینه است.

۸-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی با عبارات زبانی با دانه‌بندی چندگانه[1]

۸-۳-۱ روابط تبدیل میان *TRMLL*ها

ژوو[2] در سال ۲۰۰۵ مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر[3] $S_1 = \{s_\alpha \mid \alpha = 0, 1, 2, \ldots, L\}$ (هررا و همکاران، (۱۹۹۵)[4] ؛ ژوو، (۲۰۰۴)[5]) را بهبود بخشید و یک مجموعه زبانی جمع‌پذیر دیگر $S_2 = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = -L, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, L \right\}$ را مطرح کرد که در فصل هفتم مورد استفاده قرار گرفت، (برای راحتی توصیف، S_1 و S_2 را به ترتیب به صورت $S_1^{(L)}$ و $S_2^{(L)}$ نشان خواهیم داد) که در آن عبارت زبانی میانی یعنی s_0 نشاندهنده معیاری برای ارزیابی «بی‌تفاوتی» است و باقی عبارات زبانی که به‌طور متقارن در سمت چپ و راست آن قرار داده می‌شوند (s_{-L} و s_L) به ترتیب نشاندهنده کران بالا و کران پایین عبارت زبانی $S_2^{(L)}$ هستند.

روشن است که مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر $S_1^{(L)}$ و $S_2^{(L)}$ متوازن‌اند. در این مجموعه، مقادیر مطلق مغایرت یا انحراف بین هر دو زیر مجموعه مجاور هم یکسان فرض شده است، که گاهی اوقات در مسائل دنیای واقعی اینگونه نیست (دای و همکاران، (۲۰۰۸)[6]). از این رو، مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر دیگری توسط دای و همکارانش در سال (۲۰۰۸) به صورت زیر ارائه شد که دانه‌بندی آن نامتوازن است:

$$S_3^{(L)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = -\frac{2\left(L-1\right)}{L+2-L}, -\frac{2\left(L-1-1\right)}{L+2-\left(L-1\right)}, \ldots, \right.$$
$$\left. 0, \ldots, \frac{2\left(L-1-1\right)}{L+2-\left(L-1\right)}, \frac{2\left(L-1\right)}{L+2-L} \right\} \qquad (۸-۱)$$

که می‌توان آن را به شکل زیر ساده‌سازی کرد:

---

[1] Yu et al. (2010)
[2] Xu (2005b)
[3] Additive Linguistic Label Set
[4] Herrera et al. (1995)
[5] Xu (2004a)
[6] Dai et al. (2008)

$$S_3^{(L)} = \left\{ s_\alpha \left| \alpha = 1 - L, \frac{2}{3}\left(2 - L\right), ..., 0, ..., \frac{2}{3}\left(L - 2\right), L - 1 \right. \right\} \quad (۸-۲)$$

که در آن L یک عدد صحیح مثبت است و s_0 نشاندهنده معیار بی‌تفاوتی است و باقی عبارات زبانی که حول آن قرار داده شده‌اند، (s_{1-L} و s_{L-1}) نشاندهنده حدود بالا و پایین عبارات زبانی $S_3^{(L)}$ هستند. مجموعه عبارت زبانی $S_3^{(L)}$ شرایط زیر را ارضا می‌کند:

۱) $s_\alpha \geq s_\beta$ است، اگر $\alpha \geq \beta$

۲) عملگر منفی‌ساز در حالت کلی به این صورت تعریف شده: $\text{neg}\left(s_\alpha\right) = s_{-\alpha}$؛ و در حالت خاص به‌صورت $\text{neg}\left(s_0\right) = s_{-0}$ تعریف می‌شود. همچنین، سمت راست $S_3^{(L)}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S_3^{+(L)} = \left\{ s_\alpha \left| \alpha = \frac{2\left(i-1\right)}{L+2-i}, \ i = 1, 2, ..., L \right. \right\} \quad (۸-۳)$$

در حالی که سمت چپ $S_3^{(L)}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$S_3^{-(L)} = \left\{ s_\alpha \left| \alpha = -\frac{2\left(i-1\right)}{L+2-i}, \ i = 1, 2, ..., L \right. \right\} \quad (۸-۴)$$

در ادامه به منظور تشریح روابط بین آنها، مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر $S_1^{(L_1)}$، $S_2^{(L_2)}$ و $S_3^{(L_3)}$ را در نظر می‌گیریم. بر اساس تعریف این سه مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر ، می‌توان نتیجه گرفت که:

اولاً، میان L_i $\left(i = 1, 2, 3\right)$ ها و دانه‌بندی (یا کاردینالیتی) این سه مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر تمایز وجود دارد. به این دلیل که دانه‌بندی $S_i^{(L_i)}$ $\left(i = 1, 2, 3\right)$ به ترتیب به صورت $L_1 + 1$، $2L_2 + 1$ و $2L_3 - 1$ می‌باشد.

ثانیاً، عبارات زبانی که نشاندهنده معیارهای "بی‌تفاوتی" هستند در سه مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر فوق متفاوت هستند. بواقع در حالیکه عبارت زبانی $s_{L_1/2}$ در $S_1^{(L_1)}$ این نقش را دارد، در $S_2^{(L_2)}$ و $S_3^{(L_3)}$ این نقش به عهده s_0 است.

در نهایت، عبارات زبانی در مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر $S_1^{(L_1)}$ و $S_2^{(L_2)}$ متوازن[1] هستند. به این معنا که انحراف یا مغایرت بین هر دو عضو دنبال هم از این دو مجموعه عبارت زبانی، یکسان است، این در حالی است که عبارات یا برچسبهای زبانی در مجموعه عبارات زبانی $S_3^{(L_3)}$ نامتوازن هستند.

حال باید با توجه به روابط میان این سه مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر یعنی $S_1^{(L_1)}$، $S_2^{(L_2)}$ و $S_3^{(L_3)}$ تصمیم گرفت که از کدام مجموعه عبارت زبانی برای حل مسائل *MAGDM* استفاده کرد.

می‌توان سه مجموعه عبارت زبانی فوق یعنی $S_1^{(t_1)}$، $S_2^{(t_2)}$ و $S_3^{(t_3)}$ را به فرم مجموعه‌های عبارات زبانی پیوسته[2] : $\bar{S}_1^{(L_1)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [0, L_1] \}$، $\bar{S}_2^{(L_2)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [-L_2, L_2] \}$ و $\bar{S}_3^{(L_3)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [1-L_3, L_3-1] \}$ توسعه داد که در آن $L_i \ (i=1, 2, 3)$ سه عدد صحیح مثبت مناسب هستند (دای و همکاران، (۲۰۰۸)[3]). همچنین، از $s_\beta \ \left(\in S_1^{(L_1)},\ S_2^{(L_2)} \text{ or } S_3^{(L_3)} \right)$ به عنوان یک عبارت زبانی اولیه یا اصلی[4] یاد می‌شود (در غیر اینصورت، آن را یک عبارت زبانی مجازی[5] می‌نامند). در حالت کلی، عبارت زبانی مجازی تنها در محاسبات ظاهر می‌شوند. همچنین، دو قانون عملیاتی نیز برای $s_\alpha, s_\beta \ \left(\in \bar{S}_2^{(L_2)} \text{ or } \bar{S}_3^{(L_3)} \right)$ به صورت زیر وجود دارد:

(۱) مقدار $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$ است.

(۲) $\lambda s_\alpha = s_{\lambda\alpha}$ است.

این دو قانون عملیاتی برای مجموعه عبارات زبانی چندگانه[6] نیز صدق می‌کنند، که در ادامه به آنها می‌پردازیم (ژوو، (۲۰۰۴)[7]):

[1] Balanced
[2] Continuous Label Sets
[3] Dai et al. (2008)
[4] Original Linguistic Label
[5] Virtual Linguistic Label
[6] Multiplicative Linguistic Label Sets
[7] Xu (2004c)

مجموعه عبارات زبانی چندگانه موجب پیشرفت بیشتری در نظریه اطلاعات زبانی[1] شد، بگونه‌ای که براساس این نظریه، می‌توان یک مجموعه عبارت زبانی مناسبتر را برای یک مساله *MADM* خاص برگزید. مجموعه‌های عبارت زبانی چندگانه دارای ویژگیهای خاص خودشان هستند که بصورت زیر قابل تعریف‌اند:

ژوو[2] مجموعه عبارت زبانی چندگانه را به صورت $S_4^{(L)} = \left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha = \frac{1}{L}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, L \right\}$ تعریف کرد که در آن L یک عدد صحیح مثبت، s_1 نشان‌دهنده معیار "بی‌تفاوتی" و $s_{1/L}$ و s_L به ترتیب نشاندهنده حدود پایین و بالای عبارت زبانی $S_4^{(L)}$ هستند. $s_\alpha \in S_4^{(L)}$ دارای ویژگیهای زیر است:

۱) نامساوی $s_\alpha \geq s_\beta$ وجود دارد، اگر $\alpha \geq \beta$ باشد.

۲) عملگر متقابل[3] به صورت: $\text{rec}\left(s_\alpha\right) = s_\beta$ تعریف می‌شود، بطوری که $\alpha\beta = 1$ و در حالت خاص داریم $\text{rec}\left(s_1\right) = s_1$.

مجموعه عبارت زبانی چندگانه دیگری که توسط ژوو[4] توسعه داده شد، به صورت

$$S_5^{(L)} = \left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha = \frac{1}{L}, \frac{2}{L}, \ldots, \frac{L-1}{L}, 1, \frac{L}{L-1}, \ldots, \frac{L}{2}, L \right\}$$

تعریف شده که در آن L یک عدد صحیح مثبت، s_1 نشاندهنده معیار "بی‌تفاوتی" و نیز $s_{1/L}$ و s_L به ترتیب نشاندهنده حدود بالا و پایین عبارات زبانی $S_5^{(L)}$ هستند. همچنین $s_\alpha \in S_5^{(L)}$ شرایط زیر را برآورده می‌سازد:

۱) $s_\alpha \geq s_\beta$ اگر $\alpha \geq \beta$.

---

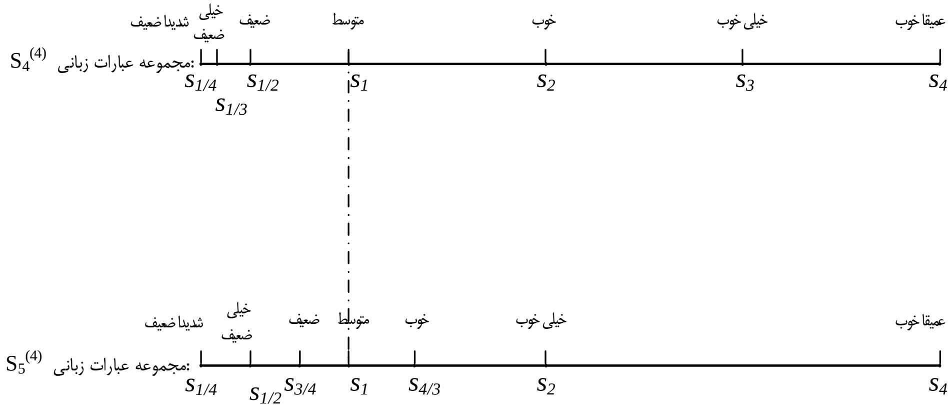
[1] Theory of Linguistic Information
[2] Xu (2004c)
[3] Reciprocal Operator
[4] (Xu, 2009b)

۲) عملگر متقابل به صورت $\text{rec}\left(s_{\alpha}\right)=s_{\beta}$ تعریف می‌شد، به طوریکه $\alpha\beta=1$ و در حالت خاص داریم $\text{rec}\left(s_1\right)=s_1$. عبارت زبانی s_1 نشاندهنده معیار "بی‌تفاوتی" دو مجموعه عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ می‌باشد.

از تعاریف مجموعه‌های عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ که در بالا به آنها اشاره شد، می‌توان به راحتی آنها را بسته به مسئله مورد بررسی انتخاب نمود:

اولاً، باید توجه داشت که دانه‌بندی هر دو مجموعه عبارات زبانی برابر *2L-1* است.

ثانیاً، عبارات زبانی در $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ به صورت ناموزون و نامتقارن[1] قرار گرفته‌اند. لیکن سمت راست عبارات زبانی در $S_4^{(L)}$ و سمت چپ در عبارات زبانی $S_5^{(L)}$ به خوبی قرینه هستند، که می‌توان آنها را در قالب هفت عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(4)}$ و $S_5^{(4)}$، به صورت آنچه که در شکل (۸–۱) مشاهده می‌شود، نمایش داد.



شکل ۱–۸ مجموعه‌هایی از هفت عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(4)}$ و $S_5^{(4)}$

---

[1] Unevenly and Asymmetrically

$S_4^{(4)} = \{ s_{1/4}$ = شدیداً ضعیف، $s_{1/3}$= خیلی ضعیف، $s_{1/2}$ = ضعیف، s_1 = متوسط ،
s_2 = خوب، s_3 = خیلی خوب ، s_4 = عمیقاً خوب$\}$ (۸-۵)

$S_5^{(4)} = \{ s_{1/4}$ = شدیداً ضعیف، $s_{1/2}$= خیلی ضعیف، $s_{3/4}$ = ضعیف، s_1 = متوسط ،
$s_{4/3}$ = خوب، s_2 = خیلی خوب ، s_4 = عمیقاً خوب $\}$ (۸-۶)

به طور مشابه، به منظور سهولت و حفظ تمامی اطلاعات تصمیمی، مجموعه‌های عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ را می‌توان به صورت پیوسته نیز نمایش داد:

$$\bar{S}_4^{(L)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \left[\frac{1}{L} \,,\, L \right] \right\} \quad \bar{S}_5^{(L)} = \left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta \in \left[\frac{1}{L} \,,\, L \right] \right\}$$

که سمتهای راست عبارتند از:

$$\bar{S}_4^{+(L)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = i,\ i \in [1, L] \right\} \quad \bar{S}_5^{+(L)} = \left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta = \frac{L}{L-(i-1)} \,,\, i \in [1, L] \right\}$$

و سمتهای چپ دو مجموعه عبارتند از:

$$\bar{S}_4^{-(t)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = \frac{1}{i} \,,\ i \in (1, L] \right\} \quad \bar{S}_5^{-(t)} = \left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta = \frac{i}{t} \,,\ i \in [1, L) \right\}$$

در بحثهایی که در ادامه می‌آید، شکل پیوسته مجموعه عبارات زبانی حائز اهمیت می‌باشد و تقریباً همه محاسبات بر اساس آنها صورت می‌گیرد. ولی در برخی مسائل تصمیم‌گیری گروهی کاربردی، به دلیل عادات و علائق تصمیم‌گیرندگان، دامنه عبارات زبانی مورد استفاده توسط تصمیم‌گیرندگان ممکن است متفاوت باشد. بنابراین، مسائل *MAGDM* با عبارات زبانی دانه‌بندی چندگانه باید با جزئیات بیشتری بیان شوند.

مسائل تصمیم‌گیری با عبارات زبانی با دانه‌بندی چندگانه[1] در مقالات بسیاری[2] مورد توجه بوده و معمولا در زندگی روزمره مشهود است. زمانی که چند تصمیم‌گیرنده را برای تصمیم‌گیری در مورد یک مسئله انتخاب می‌کنیم، آنها ممکن است پیشینه و سطح دانش متفاوتی برای حل مسئله داشته باشند. بنابراین، در یک مسئله تصمیم‌گیری گروهی با عبارات زبانی، امکان دارد که تصمیم‌گیرندگان ترجیحات خود را روی گزینه‌ها با استفاده از مجموعه عبارات زبانی با دانه‌بندی متفاوتی بیان کنند. لذا، با مسائل *MAGDM* با عبارات زبانی چندگانه مواجه می‌شویم که به صورت زیر توصیف می‌شوند:

مجموعه متناهی از گزینه‌های $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و تصمیم‌گیرندگان $D=\{d_1, d_2, ..., d_t\}$ وجود دارند. تصمیم‌گیرندگان ترجیحات خود روی گزینه‌ها را با عبارات زبانی با دانه‌بندی (یا کاردینالیتی) و نیز معانی مختلف و با در نظر گرفتن شاخصه‌های $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ بیان می‌کنند. اینکه چگونه اطلاعات تصمیم فراهم شده را تلفیق کنیم و به جواب نهایی برسیم مسئله‌ای است که اکنون با آن سروکار داریم. برای سهولت کار، فرض می‌کنیم $(k=1, 2, ..., t, i=1, 2, 3, 4, 5)$ $S_i^{(L_k)}$ مجموعه عبارات زبانی با دانه‌بندی مختلف هستند که توسط تصمیم‌گیرندگان d_k فراهم شده‌اند.

در دنیای واقعی، مسائل *MAGDM* با عبارات زبانی چنددانه، که در بالا بدان اشاره شد، به دلیل پیشینه و سطوح دانشی متفاوت تصمیم‌گیرندگان رخ می‌دهند. برای حل این مسائل، به معرفی روابط تبدیل عبارات زبانی چنددانه[3] (*TRMLLs*) می‌پردازیم:

در اینجا ابتدا به مرور توابع تبدیل عبارات زبانی چنددانه[4] (*TFMLLs*) می‌پردازیم و سپس به بحث در مورد *TRMLLs*های مبتنی بر مجموعه عبارت زبانی $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ $S_i^{(L)}$ (ژوو، (۲۰۰۹)[5]) خواهیم پرداخت و ویژگیهای آنها را برخواهیم شمرد.

[1] Multigranular linguistic decision making problems
[2] (Herrera et al. (2000); Herrera and Martínez (2001); Cordón et al. (2002); Herrera-Viedma et al. (2005); Xu (2009a))
[3] Transformation Relationships Among Multigranular Linguistic Labels (TRMLLs)
[4] Transformation Functions Among Multigranular Linguistic Labels (TFMLLs)
[5] Xu (2009a)

دو مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر زیر را در نظر بگیرید (ژوو، (۲۰۰۹)):

$$S_3^{(L_1)}=\left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha=1-L_1,\ \frac{2}{3}(2-L_1),\ \frac{2}{4}(3-L_1),\ ...,\ 0,\ ...,\ \frac{2}{4}(L_1-3),\ \frac{2}{3}(L_1-2),\ L_1-1 \right\} \quad (۸–۷)$$

$$S_3^{(L_2)}=\left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta=1-L_2,\ \frac{2}{3}(2-L_2),\ \frac{2}{4}(3-L_2),\ ...,\ 0,\ ...,\ \frac{2}{4}(L_2-3),\ \frac{2}{3}(L_2-2),\ L_2-1 \right\} \quad (۸–۸)$$

این دو عبارت زبانی دارای دانه‌بندی متفاوتی هستند که در آنها $L_i\ (i=1,2)$ دو عدد صحیح مثبت می‌باشند و $L_1 \neq L_2$. ما مجموعه‌های مذکور را به صورت پیوسته برای رسیدن به یک جواب عددی شدنی[1] در میان عبارات زبانی مجازی بسط می‌دهیم:

$$\bar{S}_3^{(L_1)}=\left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha\in[1-L_1,\ L_1-1] \right\} \quad \bar{S}_3^{(L_2)}=\left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta\in[1-L_2,\ L_2-1] \right\}$$

سپس توابع تبدیل میان عبارات زبانی چنددانه‌ای $\bar{S}_3^{(L_1)}$ و $\bar{S}_3^{(L_2)}$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$F:\bar{S}_3^{(L_1)}\rightarrow \bar{S}_3^{(L_2)} \quad (۸–۹)$$

$$\beta=F(\alpha)=\alpha\,\frac{L_2-1}{L_1-1} \quad (۸–۱۰)$$

$$F^{-1}:\bar{S}_3^{(L_2)}\rightarrow \bar{S}_3^{(L_1)} \quad (۸–۱۱)$$

$$\alpha=F^{-1}(\beta)=\beta\,\frac{L_1-1}{L_2-1} \quad (۸–۱۲)$$

با استفاده از معادلات (۸–۱۰) و (۸–۱۲) خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{L_1-1}=\frac{\beta}{L_2-1} \quad (۸–۱۳)$$

[1] Feasible Numerical Calculation

با استفاده از معادله (۸-۱۳) می‌توان مجموعه عبارات زبانی $\bar{S}_3^{(L_1)}$ و $\bar{S}_3^{(L_2)}$ را به یک فرم واحد[1] تبدیل کرد. اما عبارات متحد شده[2] معمولاً با تفکر نرمال بشری سازگار نیستند، که این امر را می‌توان در قالب مثال زیر نشان داد:

مثال ۳-۸ فرض کنید $D=\{d_1, d_2\}$ مجموعه‌ای از دو تصمیم‌گیرنده d_1 و d_2 باشد و مجموعه‌های عبارت زبانی آنها به ترتیب $S_3^{(L_1)}$ و $S_3^{(L_2)}$ باشد که دارای اندازه‌های متفاوتی هستند:

$S_3^{(L_1)} = S_3^{(3)} = \{$ s_{-2} = شدیداً ضعیف ، $s_{-2/3}$ = ضعیف ، s_0 = متوسط ، $s_{2/3}$ = خوب ، s_{-2} = عمیقاً خوب$\}$

در این حالت، $S_3^{(L_k)}\ (k=1, 2)$ را توسعه داده و آنرا به مجموعه عبارات زبانی پیوسته تبدیل کرده و مقدار $\bar{S}_3^{(L_k)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [1-L_k, L_k-1],\ i=1, 2\}$ را بدست می‌آوریم. سپس، با استفاده از معادله (۸-۱۳) می‌توان یک نگاشت بین عبارات زبانی در مجموعه عبارات زبانی پیوسته جمع‌پذیر $\bar{S}_3^{(L_1)}$ و $\bar{S}_3^{(L_2)}$ ایجاد کرد:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\bar{S}_3^{(L_1)}: & s_{-2} & s_{-1} & s_{-2/3} & s_{-1/2} & s_{-1/5} & s_0 & s_{1/5} & s_{1/2} & s_{2/3} & s_1 & s_2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bar{S}_3^{(L_2)}: & s_{-4} & s_{-2} & s_{-4/3} & s_{-1} & s_{-2/5} & s_0 & s_{2/5} & s_1 & s_{4/3} & s_2 & s_4
\end{array}
$$

از نگاشت فوق بین $\bar{S}_3^{(L_1)}$ و $\bar{S}_3^{(L_2)}$ مشخص است که $TFMLL$ها بسیار پیچیده هستند و با شیوه تفکر انسانی سازگار نیستند. اگر شاخصهای ارزیابی سه سطحی مانند {عمیقاً خوب، متوسط و شدیداً ضعیف} از قبل داده شده باشند، ما فقط باید دو شاخص مانند «ضعیف» و «خوب» را بصورت متقارن به آنها بیافزائیم تا بتوانیم و به منظور سادگی و راحتی به شاخصهای ارزیابی پنج سطحی دست یابیم. بطور مشابه، در فرآیند گسترش مجموعه‌های عبارات زبانی پیوسته جمع‌پذیر از $(L_1=3)$ $\bar{S}_3^{(L_1)}$ به $(L_2=5)$ $\bar{S}_3^{(L_2)}$

---

[1] Uniform

[2] Unified Labels

اگر به طور مستقیم در میان دو عبارت زبانی «نسبتاً ضعیف = s_{α_1}» و «خیلی ضعیف = s_{α_2}» عبارت زبانی «ضعیف = $s_{-2/3}$» را در درون مجموعه عبارت زبانی $\overline{S}_3^{(L_1)}$ قرار دهیم، و یا در میان دو عبارت زبانی «نسبتاً خوب = s_{α_3}» و «خیلی خوب = s_{α_4}» عبارت زبانی دیگری همچون «خوب = $s_{2/3}$» را در درون $\overline{S}_3^{(L_1)}$ قرار دهیم، بطوریکه $\alpha_i \in [1-L_1, L_1-1]\ (i=1, 2, 3, 4)$ باشد، آنگاه $TFMLL$ها با تفکر انسانی سازگار خواهند بود و نگاشت عبارات زبانی آسانتر خواهد بود:

$$\begin{array}{cccccccccc} \overline{S}_3^{(L_1)}: & s_{-2} & s_{\alpha_1} & s_{-2/3} & s_{\alpha_2} & s_0 & s_{\alpha_3} & s_{2/3} & s_{\alpha_4} & s_2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \overline{S}_3^{(L_2)}: & s_{-4} & s_{-2} & s_{-1} & s_{-2/5} & s_0 & s_{2/5} & s_1 & s_2 & s_4 \end{array}$$

حال، بر اساس تحلیلهای فوق، می‌توان به ارائه چند $TRMLL$ دیگر پرداخت.

بر اساس مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر $S_3^{(L)}$ دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید:

$$S_3^{(L_1)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = 1-L_1, \frac{2}{3}(2-L_1), \frac{2}{4}(3-L_1), ..., 0, ..., \frac{2}{4}(L_1-3), \frac{2}{3}(L_1-2), L_1-1 \right\} \qquad (۸-۱۴)$$

$$S_3^{(L_1)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha = 1-L_1, \frac{2}{3}(2-L_1), \frac{2}{4}(3-L_1), ..., 0, ..., \frac{2}{4}(L_1-3), \frac{2}{3}(L_1-2), L_1-1 \right\} \qquad (۸-۱۵)$$

دو مجموعه عبارت زبانی پیوسته جمع‌پذیر با دانه‌بندی متفاوت باشند که در آن $L_i\ (i=1, 2)$ اعداد صحیح مثبت هستند و $L_1 \neq L_2$ می‌باشد. $S_3^{(L_1)}$ و $S_3^{(L_2)}$ را به مجموعه‌های عبارت زبانی پیوسته $\overline{S}_3^{(L_1)} = \left\{ s_\alpha \,\middle|\, \alpha \in [1-L_1, L_1-1] \right\}$ و $\overline{S}_3^{(L_2)} = \left\{ s_\beta \,\middle|\, \beta \in [1-L_2, L_2-1] \right\}$ توسعه می‌دهیم.

ابتدا، بخشهای راست $\overline{S}_3^{(L_1)}$ و $\overline{S}_3^{(L_2)}$ را درست مانند معادله (۸-۳) در نظر می‌گیریم، سپس داریم:

$$\alpha = \frac{2(i_1-1)}{L_1+2-i_1}, \ i_1 \in [1, L_1] \quad \beta = \frac{2(i_2-1)}{L_2+2-i_2}, \ i_2 \in [1, L_2]$$

اکنون، می‌توان $TRMLL$ها در بخشهای راست $\overline{S}_3^{(L_1)}$ و $\overline{S}_3^{(L_2)}$ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\frac{L_1-1}{L_1+1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{L_2-1}{L_2+1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} \right) \qquad (۸-۱۶)$$

به طور مشابه، برای بخشهای چپ $\overline{S}_3^{(L_1)}$ و $\overline{S}_3^{(L_2)}$ خواهیم داشت:

$$\alpha = -\frac{2\left(i_1-1\right)}{L_1+2-i_1},\ \ i_1 \in \left[1,\, L_1\right] \quad \beta = -\frac{2\left(i_2-1\right)}{L_2+2-i_2},\ \ i_2 \in \left[1,\, L_2\right]$$

*TRMLL*ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

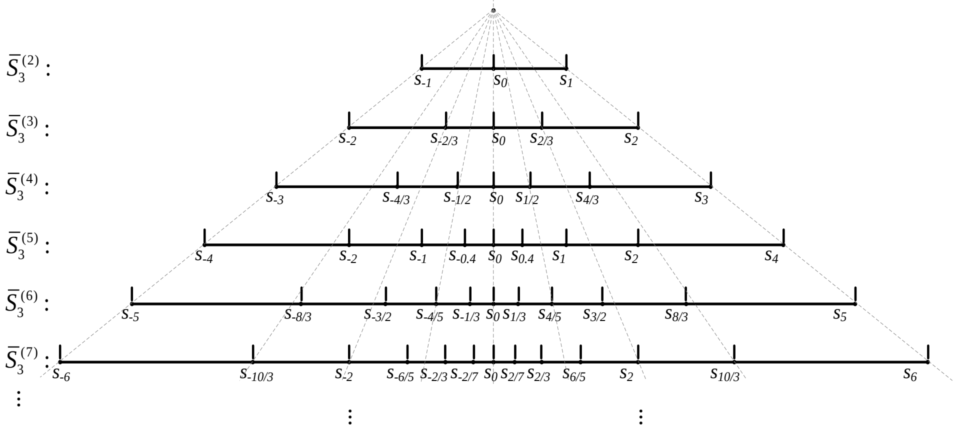
$$\frac{t_1-1}{t_1+1}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{t_2-1}{t_2+1}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}\right) \tag{۸–۱۷}$$

با توجه به معادلات (۸–۱۶) و (۸–۱۷) خواهیم داشت:

$$\frac{L_1-1}{L_1+1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|\alpha|}\right)=\frac{L_2-1}{L_2+1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|\beta|}\right) \tag{۸–۱۸}$$

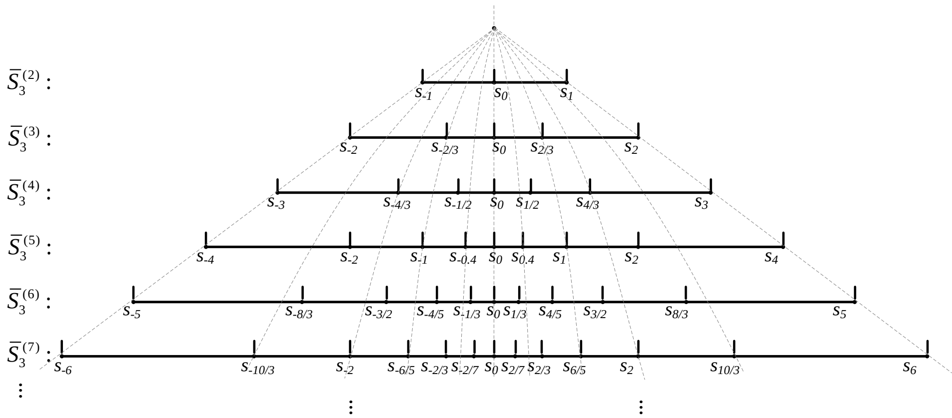
که آنها را *TRMLL*های مبتنی بر مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر $S_3^{(L)}$ میخوانیم، جاییکه $\alpha\cdot\beta \geq 0$ می‌باشد.در ادامه، به منظور درک روشن دو *TRMLL* فوق دو نگاشت تصویری از آنها ارائه می‌کنیم. فرض کنید:

$$S_3^{(L)}=\left\{s_\alpha\ \middle|\ \alpha=1-L,\, \frac{2}{3}\left(2-L\right),\, ...,\, 0,\, ...,\, \frac{2}{3}\left(L-2\right),\, L-1\right\}\ \ t=1,\, 2,\, ...$$



شکل ۲–۸ نگاشت تصویری بر اساس *TFMLL*ها

یک مجموعه عبارات زبانی جمع‌پذیر باشد، حال، $S_3^{(L)}\ (L=1, 2, ...)$ را به مجموعه عبارات زبانی پیوسته $\bar{S}_3^{(L)}=\left\{s_\alpha \mid \alpha=[1-L, L-1]\right\}$، به ازای $(L=1, 2, ...)$، توسعه می‌دهیم. با استفاده از معادلات (۸-۱۳) و (۸-۱۸) می‌توان دو نگاشت تصویری موجود در شکلهای (۸-۲) و (۸-۳) را ارائه نمود:



شکل ۳-۸ نگاشت تصویری بر اساس *TRMLL*ها

در این اشکال، بخشها با طول متفاوت نشان‌دهنده مجموعه‌های عبارت زبانی پیوسته $\bar{S}_3^{(L)}\ (L=1, 2, ...)$ با دانه‌بندی مختلف هستند و خطوط شکسته که از معادلات (۸-۱۳) و (۸-۱۸) بدست آمده‌اند نشان‌دهنده رابطه نگاشتی میان عبارات زبانی مجازی هستند. همانطور که در شکل (۸-۲) مشاهده می‌شود، تمامی خطوط شکسته نگاشتی، مستقیم هستند که نشان می‌دهد *TFMLL*ها در $\bar{S}_3^{(L)}\ (L=1, 2, ...)$ از طریق تغییر منظم طولها در بخشهای مربوطه تشکیل شده که منجر به مجموعه‌های عبارت زبانی معینی شده است. در حالی که خطوط شکسته نگاشتی انحنادار در شکل (۸-۳) نشان می‌دهند که ما مجموعه‌های عبارت زبانی چنددانه‌ای[1] (یعنی با دانه‌بندی متفاوت) را به صورت نامنظم توسعه داده و یا تبدیل کرده‌ایم.

[1] Multigranular Linguistic Labels

بر اساس تعریف $TFMLL$ها (ژوو، (۲۰۰۹)[1]) مشاهده می‌کنید که بین عبارات زبانی تبدیل شده و عبارات زبانی مورد انتظار تفاوت وجود دارد. یعنی یک عبارت زبانی تبدیل یافته همچون $s_i' \in \bar{S}_3^{(L_2)} = \{ s_\beta \mid \beta \in [1-L_2, L_2-1] \}$ که از طریق عبارت زبانی مجازی $s_i \in \bar{S}_3^{(L_1)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [1-L_1, L_1-1] \}$ حاصل شده است وقتی ارزیابی زبانی «خوب» را نشان می‌دهد، ممکن است به عبارت زبانی مجازی $s_j \in \bar{S}_3^{(L_2)}$ که نشان‌دهنده ارزیابی زبانی «نسبتاً خوب» است نزدیک باشد. این تحلیل تحت شرایطی است که داریم $L_1 >> L_2,\ L_1, L_2 \in N^*$ و در آن N^* مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت است. $TRMLL$های بهبود یافته می‌توانند ناهمگونی فوق را با استفاده از روابط تبدیل نامتوازن از بین ببرند، اما محاسبه $TRMLL$های بهبود یافته مبتنی بر $S_3^{(L)}$ کاری پیچیده تر از آن چیزی است که در پژوهش ژوو در سال (۲۰۰۹) است. بنابراین، ارائه یک روش ساده و سرراست برای انجام چنین محاسباتی ضروری است. به طور مشابه، در ادامه چند $TRMLL$ بر اساس مجموعه‌های عبارت زبانی $S_i^{(L)}$ $(i=1, 2, 4, 5)$ را معرفی خواهیم کرد بگونه‌ای تمامی مسائل $MAGDM$ با عبارات زبانی دارای اندازه یا دانه‌بندی متفاوت در شرایط دنیای واقعی قابل حل باشند.

بر اساس مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر $S_1^{(L)}$، مجموعه‌های عبارت زبانی $S_1^{(L_k)}$ $(k=1, 2, \dots, t)$ را با دانه‌بندی مختلف در نظر می‌گیریم و $S_1^{(L_k)} = \{ s_\alpha \mid \alpha = 0, 1, \dots, L_k \}$ را به فرم مجموعه عبارات پیوسته $\bar{S}_1^{(L_k)} = \{ s_\alpha \mid \alpha \in [1, L_k] \}$ تبدیل می‌کنیم. سپس چند $TRMLL$ را بر اساس $S_1^{(L)}$ به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\frac{\alpha_i - 1}{L_i - 1} = \frac{\alpha_j - 1}{L_j - 1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, t \tag{۸-۱۹}$$

با توجه به وضعیت مجموعه عبارت زبانی جمع‌پذیر متقارن $S_2^{(L)}$، تعیین $TRMLL$ها بسیار ساده بوده و می‌توان آنها را به صورت زیر تعریف کرد:

[1] Xu (2009a)

$$\frac{\alpha_i}{L_i}=\frac{\alpha_j}{L_j}\,,\quad i,\ j=1,\,2,\,\ldots,\,t \tag{۸-۲۰}$$

که در آن، مجموعه‌های عبارت زبانی $S_2^{(L_i)}=\left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha=-L_i,\,\ldots,\,-1,\,0,\,1,\,\ldots,\,L_i \right\}$ دارای دانه‌بندی متفاوتی هستند.

ولیکن *TRMLL*های مبتنی بر مجموعه‌های عبارت زبانی چندگانه $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ به دلیل نامتقارن بودن $S_4^{(L)}$ و $S_5^{(L)}$ پیچیده هستند. مجموعه عبارت زبانی $S_4^{(L_i)}=\left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha=\frac{1}{L_i}\,,\,\ldots,\,\frac{1}{2}\,,\,1,\,2,\,\ldots,\,L_i \right\}$ را در نظر گرفته و $\left(i=1,\,2,\,\ldots,\,t\right)$ $S_4^{(L_i)}$ را به فرم مجموعه‌های عبارات زبانی پیوسته $\overline{S}_4^{(L_i)}=\left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha\in\left[\frac{1}{L_i}\,,\,L_i\right]\right\}$ تبدیل می‌کنیم. سپس، *TRMLL* مبتنی بر $S_4^{(L)}$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{[\alpha_i]-1}{L_i-1}=\frac{[\alpha_j]-1}{L_j-1}\,,\quad i,\ j=1,\,2,\,\ldots,\,t \tag{۸-۲۱}$$

که در آن

$$[\alpha_i]=\begin{cases} \alpha_i\,, & \alpha_i\ge 0 \\ \dfrac{1}{\alpha_i}\,, & \alpha_i<0 \end{cases}\,,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,t \tag{۸-۲۲}$$

است و $\alpha_i\cdot\alpha_j\ge 0$ می‌باشد، زیرا تبدیل عبارت زبانی «خوب» به «ضعیف» و یا برعکس آن، عملاً کاربردی نیست.

به طور مشابه، مجموعه عبارت زبانی زیر را در نظر بگیرید:

$$S_5^{(L_i)}=\left\{ s_\alpha \;\middle|\; \alpha=\frac{1}{L_i}\,,\,\frac{2}{L_i}\,,\,\ldots,\,\frac{L_i-1}{L_i}\,,\,1,\,\frac{L_i}{L_i-1}\,,\,\ldots,\,\frac{L_i}{2}\,,\,L_i \right\}$$

حال $S_5^{(L_i)}$ $(i=1, 2, ..., t)$ را به فرم مجموعه عبارات پیوسته تبدیل می‌کنیم و $\bar{S}_5^{(L_i)} = \left\{ s_\alpha \middle| \alpha \in \left[\frac{1}{L_i}, L_i \right] \right\}$ را بدست می‌آوریم. سپس، $TRMLL$ها مبتنی بر مجموعه عبارت زبانی چندگانه $S_5^{(L)}$ را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\frac{L_i}{L_i - 1}\left(\frac{1}{[\alpha_i]} - 1\right) = \frac{L_j}{L_j - 1}\left(\frac{1}{[\alpha_j]} - 1\right), \quad i, j = 1, 2, ..., t \qquad (۸-۲۳)$$

که در آن $\ln^{\alpha_i} \cdot \ln^{\alpha_j} \geq 0$ است.

مسائل $MAGDM$ دارای عبارات زبانی با دانه‌بندی مختلف را می‌توان بر اساس مجموعه‌های عبارت زبانی از طریق معادلات (۸-۱۸)، (۸-۲۱) و (۸-۲۳) حل کرد.

۸-۳-۲ روش تصمیم‌گیری

با در نظر گرفتن این امر که تعداد عبارات زبانی در یک مجموعه عبارت زبانی استفاده شده توسط یک تصمیم‌گیرنده چندان زیاد نیست، در مسائل کاربردی، عموماً دانه‌بندی مجموعه عبارت زبانی از ۲۰ مورد تجاوز نمی‌کند. در ادامه، پنج جدول مرجع بر اساس پنج عبارت زبانی با حداکثر دانه‌بندی ۲۰ موردی را بدست می‌آوریم. هر جدول به سه بخش تقسیم شده است (و با حروف τ، α و c نشان داده شده‌اند) که در آن، مقادیر کاردینالیتی مجموعه‌های عبارت زبانی با دانه‌بندی مختلف در ستون τ، مقادیر اندیسهای عبارات زبانی در ستون α و مقادیر نشان‌دهنده شباهت عبارات زبانی در مجموعه‌های عبارات زبانی با دانه‌بندی مختلف در ستون c قرار می‌گیرند. ضمناً هرچه مقدار ستون بیشتر باشد، عبارت زبانی بهتر خواهد بود.

برای مثال فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده d_k $(k=1, 2, 3)$ مقادیر اطلاعات ارزیابی خود را در قالب عبارات زبانی $s_{0.5}$، $s_{1.1}$ و $s_{1.2}$ به ترتیب بر اساس مجموعه‌های عبارات زبانی $S_3^{(3)}$، $S_3^{(5)}$ و $S_3^{(7)}$ نشان دهند. در جداول (۸-۵)، (۸-۶) و (۸-۷) بدلیل اینکه اندیس $s_{0.5}$ به بازه $[0.49, 0.67)$ تعلق دارد، مقدار ستون $c_1 = 14$ است. در حالیکه $c_2 = 15$ است، به این دلیل که اندیس $s_{1.1}$ به بازه $(0.83, 1.22]$

تعلق دارد. و $c_3 = 14$ است با این دلیل که اندیس $s_{1.2}$ به بازه $[0.83, 1.22)$ تعلق دارد. بنابراین، می‌توان تضمین کرد که رابطه $s_{0.5} \sim s_{1.2} \prec s_{1.1}$ برقرار است، به دلیل که $c_1 = c_3 < c_2$ است که علامت «~» نشاندهنده بی‌تفاوتی بین دو عبارت زبانی است. بنابراین، ارزیابی تصمیم‌گیرنده d_1 نسبت به d_2 بی‌تفاوت است ولی از d_3 پائین‌تر است.

با توجه به پنج جدول مرجع، می‌توان گفت همه عبارات زبانی به صورت یک مجموعه عبارت زبانی ثابت با دانه‌بندی ۲۰ موردی، یکپارچه شده و به صورت مقادیر ستونی نمایش داده می‌شوند. با استفاده از این روش، می‌توان پیچیدگی محاسبات در کاربردهای واقعی *TRMLL*ها را تا حد بسیار زیادی کاهش داد.

جدول ۸-۵ *TRMLL* بر اساس مجموعه عبارت زبانی S_1

α / c / τ	شدیداً ضعیف ←								متوسط
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
3	1	1.06	1.17	1.28	1.39	1.50	1.61	1.72	1.83	1.94
5	1	1.11	1.33	1.56	1.78	2.00	2.22	2.44	2.67	2.89
7	1	1.17	1.50	1.83	2.17	2.50	2.83	3.17	3.50	3.83
9	1	1.22	1.67	2.11	2.56	3.00	3.44	3.89	4.33	4.78
11	1	1.28	1.83	2.39	2.94	3.50	4.06	4.61	5.17	5.72
13	1	1.33	2.00	2.67	3.33	4.00	4.67	5.33	6.00	6.67
15	1	1.39	2.17	2.94	3.72	4.50	5.28	6.06	6.83	7.61
17	1	1.44	2.33	3.22	4.11	5.00	5.89	6.78	7.67	8.56
19	1	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5

α	متوسط				→				بسیارخوب
c / τ	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
3	2.06	2.17	2.28	2.39	2.50	2.61	2.72	2.83	2.94	3
5	3.11	3.33	3.56	3.78	4.00	4.22	4.44	4.67	4.89	5
7	4.17	4.50	4.83	5.17	5.50	5.83	6.17	6.50	6.83	7
9	5.22	5.67	6.11	6.56	7.00	7.44	7.89	8.33	8.78	9
11	6.28	6.83	7.39	7.94	8.50	9.06	9.61	10.17	10.72	11
13	7.33	8.00	8.67	9.33	10.00	10.67	11.33	12.00	12.67	13
15	8.39	9.17	9.94	10.72	11.50	12.28	13.06	13.83	14.61	15
17	9.44	10.33	11.22	12.11	13.00	13.89	14.78	15.67	16.56	17
19	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17.5	18.5	19

جدول ۶–۸ *TRMLL* بر اساس مجموعه عبارت زبانی S_2

α / c / τ	شدیدا ضعیف	←							متوسط
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	-1	-0.94	-0.83	-0.72	-0.61	-0.50	-0.39	-0.28	-0.17	-0.06
2	-2	-1.89	-1.67	-1.44	-1.22	-1.00	-0.78	-0.56	-0.33	-0.11
3	-3	-2.83	-2.50	-2.17	-1.83	-1.50	-1.17	-0.83	-0.50	-0.17
4	-4	-3.78	-3.33	-2.89	-2.44	-2.00	-1.56	-1.11	-0.67	-0.22
5	-5	-4.72	-4.17	-3.61	-3.06	-2.50	-1.94	-1.39	-0.83	-0.28
6	-6	-5.67	-5.00	-4.33	-3.67	-3.00	-2.33	-1.67	-1.00	-0.33
7	-7	-6.61	-5.83	-5.06	-4.28	-3.50	-2.72	-1.94	-1.17	-0.39
8	-8	-7.56	-6.67	-5.78	-4.89	-4.00	-3.11	-2.22	-1.33	-0.44
9	-9	-8.5	-7.5	-6.5	-5.5	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5

α / c / τ	متوسط				→					بسیار خوب
	10	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
1	0.06	0.17	0.28	0.39	0.50	0.61	0.72	0.83	0.94	1
2	0.11	0.33	0.56	0.78	1.00	1.22	1.44	1.67	1.89	2
3	0.17	0.50	0.83	1.17	1.50	1.83	2.17	2.50	2.83	3
4	0.22	0.67	1.11	1.56	2.00	2.44	2.89	3.33	3.78	4
5	0.28	0.83	1.39	1.94	2.50	3.06	3.61	4.17	4.72	5
6	0.33	1.00	1.67	2.33	3.00	3.67	4.33	5.00	5.67	6
7	0.39	1.17	1.94	2.72	3.50	4.28	5.06	5.83	6.61	7
8	0.44	1.33	2.22	3.11	4.00	4.89	5.78	6.67	7.56	8
9	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9

جدول ۷-۸ *TRMLL* بر اساس مجموعه عبارت زبانی S_3

α / c / τ	متوسط ← شدیدا ضعیف									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2	-1	-0.93	-0.78	-0.64	-0.52	-0.40	-0.30	-0.21	-0.12	-0.04
3	-2	-1.83	-1.45	-1.15	-0.89	-0.67	-0.49	-0.33	-0.19	-0.06
4	-3	-2.69	-2.04	-1.55	-1.17	-0.87	-0.62	-0.41	-0.23	-0.07
5	-4	-3.51	-2.55	-1.89	-1.39	-1.01	-0.71	-0.46	-0.25	-0.08
6	-5	-4.30	-3.01	-2.17	-1.57	-1.13	-0.78	-0.50	-0.28	-0.09
7	-6	-5.06	-3.42	-2.41	-1.72	-1.22	-0.83	-0.53	-0.29	-0.09
8	-7	-5.79	-3.79	-2.61	-1.84	-1.29	-0.88	-0.56	-0.30	-0.09
9	-8	-6.49	-4.12	-2.79	-1.94	-1.35	-0.92	-0.58	-0.31	-0.10
10	-9	-7.17	-4.42	-2.95	-2.03	-1.40	-0.95	-0.60	-0.32	-0.10

α / c / τ	متوسط								بسیار خوب
	10	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
2	0.04	0.12	0.21	0.30	0.40	0.52	0.64	0.78	0.93	1
3	0.06	0.19	0.33	0.49	0.67	0.89	1.15	1.45	1.83	2
4	0.07	0.23	0.41	0.62	0.87	1.17	1.55	2.04	2.69	3
5	0.08	0.25	0.46	0.71	1.01	1.39	1.89	2.55	3.51	4
6	0.09	0.28	0.50	0.78	1.13	1.57	2.17	3.01	4.30	5
7	0.09	0.29	0.53	0.83	1.22	1.72	2.41	3.42	5.06	6
8	0.09	0.30	0.56	0.88	1.29	1.84	2.61	3.79	5.79	7
9	0.10	0.31	0.58	0.92	1.35	1.94	2.79	4.12	6.49	8
10	0.10	0.32	0.60	0.95	1.40	2.03	2.95	4.42	7.17	9

جدول ۸–۸ $TRMLL$ بر اساس مجموعه عبارت زبانی S_4

α / c / τ	متوسط	←								شدیدا ضعیف
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2	1/2	0.52	0.55	0.58	0.62	0.67	0.72	0.79	0.87	0.96
3	1/3	0.35	0.38	0.41	0.45	0.50	0.57	0.65	0.76	0.93
4	1/4	0.26	0.29	0.32	0.35	0.40	0.47	0.55	0.68	0.90
5	1/5	0.21	0.23	0.26	0.29	0.34	0.40	0.48	0.62	0.87
6	1/6	0.18	0.19	0.22	0.25	0.29	0.34	0.43	0.56	0.84
7	1/7	0.15	0.17	0.19	0.22	0.25	0.30	0.38	0.52	0.82
8	1/8	0.13	0.15	0.17	0.19	0.22	0.27	0.35	0.48	0.79
9	1/9	0.12	0.13	0.15	0.17	0.20	0.25	0.32	0.45	0.77
10	1/10	0.11	0.12	0.13	0.15	0.18	0.23	0.29	0.42	0.75

α	متوسط									بسیار خوب
c \ τ	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
2	1.06	1.17	1.28	1.39	1.50	1.61	1.72	1.83	1.94	2
3	1.11	1.33	1.56	1.78	2.00	2.22	2.44	2.67	2.89	3
4	1.17	1.50	1.83	2.17	2.50	2.83	3.17	3.50	3.83	4
5	1.22	1.67	2.11	2.56	3.00	3.44	3.89	4.33	4.78	5
6	1.28	1.83	2.39	2.94	3.50	4.06	4.61	5.17	5.72	6
7	1.33	2.00	2.67	3.33	4.00	4.67	5.33	6.00	6.67	7
8	1.39	2.17	2.94	3.72	4.50	5.28	6.06	6.83	7.61	8
9	1.44	2.33	3.22	4.11	5.00	5.89	6.78	7.67	8.56	9
10	1.50	2.50	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	9.50	10

جدول ۹-۸ *TRMLL* بر اساس مجموعه عبارت زبانی S_5

α / c / t	متوسط ← شدیدا ضعیف									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2	1/2	0.53	0.58	0.64	0.69	0.75	0.81	0.86	0.92	0.97
3	1/3	0.37	0.44	0.52	0.59	0.67	0.74	0.81	0.89	0.96
4	1/4	0.29	0.38	0.46	0.54	0.63	0.71	0.79	0.88	0.96
5	1/5	0.24	0.33	0.42	0.51	0.60	0.69	0.78	0.87	0.96
6	1/6	0.21	0.31	0.40	0.49	0.58	0.68	0.77	0.86	0.95
7	1/7	0.19	0.29	0.38	0.48	0.57	0.67	0.76	0.86	0.95
8	1/8	0.17	0.27	0.37	0.47	0.56	0.66	0.76	0.85	0.95
9	1/9	0.16	0.26	0.36	0.46	0.56	0.65	0.75	0.85	0.95
10	1/10	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95

α	متوسط								بسیار خوب →
c / t	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
2	1.03	1.09	1.16	1.24	1.34	1.45	1.58	1.73	1.93	2
3	1.04	1.13	1.23	1.36	1.51	1.70	1.95	2.29	2.79	3
4	1.05	1.15	1.27	1.42	1.61	1.86	2.21	2.73	3.60	4
5	1.05	1.16	1.29	1.46	1.68	1.98	2.40	3.08	4.35	5
6	1.05	1.16	1.31	1.49	1.73	2.06	2.55	3.38	5.06	6
7	1.05	1.17	1.32	1.51	1.76	2.12	2.67	3.62	5.73	7
8	1.05	1.17	1.33	1.52	1.79	2.17	2.77	3.83	6.35	8
9	1.05	1.18	1.33	1.54	1.81	2.22	2.85	4.01	6.94	9
10	1.06	1.18	1.34	1.55	1.83	2.25	2.92	4.17	7.50	10

اکنون از *TRMLL*ها در حل مسائل *MAGDM* استفاده می‌کنیم که دارای گام‌های زیر است:

گام ۱) در یک مسئله *MAGDM*، فرض کنید $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعه گزینه‌ها، $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ مجموعه شاخصه‌ها و $D=\{d_1, d_2, ..., d_t\}$ دسته‌ای از تصمیم‌گیرندگان باشند. تصمیم‌گیرندگان $d_k (k=1, 2, ..., t)$ اطلاعات ترجیح زبانی را روی گزینه‌های $x_i (i=1, 2, ..., n)$ با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j (j=1, 2, ..., m)$ و با استفاده از مجموعه‌های عبارت زبانی $S^{(L_i)} (i=1, 2, ..., t)$ فراهم می‌کنند. ترجیحات فراهم شده توسط تصمیم‌گیرندگان d_k در ماتریسهای تصمیم $R_k=\left(r_{ij}^{(k)}\right)_{n\times m}$ تجمیع می‌گردد. به علاوه، $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ را به

عنوان بردار وزن شاخصه‌ها و $\lambda=\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t\right)$ را بردار وزن تصمیم‌گیرندگان در نظر می‌گیریم که به ازای $\lambda_k \geq 0$ ،w_j، روابط $\sum_{j=1}^{m} w_j=1$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k=1$ برقرار است.

گام ۲) اطلاعات ترجیح در i امین سطر از R_k را با استفاده از عملگر EWA تلفیق نمائید:

$$\begin{aligned} z_i^{(k)}(w) &= EWA_w\left(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}\right) \\ &= w_1 r_{i1}^{(k)} \oplus w_2 r_{i2}^{(k)} \oplus \cdots \oplus w_m r_{im}^{(k)} \quad i=1, 2, ..., n, k=1, 2, ..., t \end{aligned} \tag{۸-۲۴}$$

سپس، مقادیر $z_i^{(k)}(w)$ را با توجه به یکی از پنج جدول مرجع فوق به مقدار ستونی $c_i^{(k)}$ تبدیل کنید که $c_i^{(k)}$ یک مقدار ستونی متناظر با گزینه x_i برای تصمیم‌گیرنده d_k است.

گام ۳) از عملگر EWA به منظور تلفیق $c_i^{(k)}$ استفاده کنید که در آن c_i مقدار کلی ستون متناظر با گزینه x_i نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} c_i &= EWA_\lambda\left(c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, ..., c_i^{(t)}\right) \\ &= \lambda_1 c_i^{(1)} \oplus \lambda_2 c_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \lambda_t c_i^{(t)} \quad i=1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{۸-۲۵}$$

گام ٤) گزینه‌های x_i را رتبه‌بندی کرده و بهینه آنها را متناسب با مقادیر کلی ستونی c_i انتخاب کنید.

۸-۳-۳ مثال کاربردی

مثال ٤-۸ یک مسئله کاربردی *MAGDM* را درنظر بگیرید که هدفش ارزیابی توان علمی-پژوهشی پنج استاد دانشگاه $x_i\ \left(i=1, 2, 3, 4, 5\right)$ است. سه شاخصه اصلی که ممکن است در ارتقاء اساتید اثرگذار باشند عبارتند از: (۱) u_1: توانایی تدریس، (۲) u_2: سابقه پژوهش علمی و (۳) u_3: توان اجرایی. همچنین، بردار وزن شاخصه‌ها بصورت $w=\left(0.3, 0.5, 0.2\right)$ می‌باشد. سه تصمیم‌گیرنده

$d_k \ (k=1, 2, 3)$ با بردار وزن $\lambda = (0.3, \ 0.4, 0.3)$، این پنج استاد را بر اساس سه مجموعه زبانی با اندازه‌های متفاوت $S_3^{(3)}$، $S_3^{(4)}$ و $S_3^{(6)}$ با هم مقایسه می‌کنند به طوریکه:

$S_3^{(3)}$ = { s_{-2} = شدیداً ضعیف، $s_{-2/3}$ = ضعیف ، s_0 = متوسط ،
$s_{2/3}$ = خوب، s_2 = عمیقاً خوب}
$S_3^{(4)}$ = { s_{-3} = شدیداً ضعیف، $s_{-4/3}$ = خیلی ضعیف، $s_{-1/2}$ = ضعیف، s_0 = متوسط ،
$s_{1/2}$ = خوب، $s_{4/3}$ = خیلی خوب، s_3= عمیقاً خوب }
$S_3^{(6)}$ ={ s_{-5} = شدیداً ضعیف ، $s_{-8/3}$ = خیلی ضعیف ، $s_{-3/2}$ =تاحدی‌ضعیف، $s_{-4/5}$ =ضعیف،
$s_{-1/3}$ = نسبتاً ضعیف ، s_0 =متوسط ، $s_{1/3}$ = نسبتاًخوب ، $s_{4/5}$ =خوب،
$s_{3/2}$ =تاحدی‌خوب، $s_{8/3}$ =خیلی‌خوب ، s_5 =عمیقاً}

و ماتریسهای تصمیم زبانی R_k نیز در جداول (۸–۱۰)، (۸–۱۱) و (۸–۱۲) آورده شده‌اند:

جدول ۸-۱۰ ماتریس تصمیم زبانی R_1

	u_1	u_2	u_3
x_1	$s_{-2/3}$	s_0	$s_{2/3}$
x_2	$s_{-2/3}$	$s_{2/3}$	s_2
x_3	$s_{-2/3}$	s_{-2}	$s_{2/3}$
x_4	s_2	s_0	$s_{-2/3}$
x_5	s_0	s_2	$s_{2/3}$

جدول ۱۱-۸ ماتریس تصمیم زبانی R_2

	u_1	u_2	u_3
x_1	$s_{-1/2}$	$s_{4/3}$	$s_{-1/2}$
x_2	$s_{-1/2}$	$s_{4/3}$	$s_{1/2}$
x_3	$s_{-4/3}$	$s_{-4/3}$	s_0
x_4	s_3	$s_{1/2}$	s_0
x_5	$s_{-4/3}$	$s_{4/3}$	s_{-3}

جدول ۱۲-۸ ماتریس تصمیم زبانی R_3

	u_1	u_2	u_3
x_1	$s_{1/3}$	s_2	$s_{3/2}$
x_2	$s_{4/5}$	s_0	s_2
x_3	s_5	$s_{4/5}$	$s_{3/2}$
x_4	s_{-2}	s_2	s_0
x_5	$s_{-3/2}$	$s_{4/5}$	s_2

برای رسیدن به بهترین گزینه، گامهای زیر باید طی شوند:

گام ۱) با استفاده از عملگر EWA یعنی معادله (۸-۲۴)، اطلاعات ترجیح را در i امین سطر از ماتریسهای R_k را برای محاسبه مقادیر $z_i^{(k)}(w)$ تلفیق می‌کنیم:

$$z_1^{(1)}(w)=s_{-0.067},\ z_2^{(1)}(w)=s_{0.533},\ z_3^{(1)}(w)=s_{-1.067},\ z_4^{(1)}(w)=s_{0.467},\ z_5^{(1)}(w)=s_{1.133}$$
$$z_1^{(2)}(w)=s_{0.417},\ z_2^{(2)}(w)=s_{0.617},\ z_3^{(2)}(w)=s_{-1.067},\ z_4^{(2)}(w)=s_{1.15},\ z_5^{(2)}(w)=s_{-0.333}$$
$$z_1^{(3)}(w)=s_{1.4},\ z_2^{(3)}(w)=s_{0.64},\ z_3^{(3)}(w)=s_{2.2},\ z_4^{(3)}(w)=s_{0.4},\ z_5^{(3)}(w)=s_{0.35}$$

گام ۲) با توجه به جدول (۸-۷)، می‌توان $z_i^{(k)}(w)$ ها را به‌صورت زیر به $c_i^{(k)}$ها تبدیل کرد:

$$c_1^{(1)}=6,\ c_2^{(1)}=14,\ c_3^{(1)}=4,\ c_4^{(1)}=13,\ c_5^{(1)}=16$$
$$c_1^{(2)}=13,\ c_2^{(2)}=13, c_3^{(2)}=5, c_4^{(2)}=15, c_5^{(2)}=8$$
$$c_1^{(3)}=15,\ c_2^{(3)}=13, c_3^{(3)}=17,\ c_4^{(3)}=12, c_5^{(3)}=12$$

گام ۳) از عملگر EWA (۸-۲۵) به منظور تلفیق مقادیر ستونی متناظر با هر استاد x_i استفاده کرده و مقادیر کلی ستونی c_i به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$c_1=11.5,\ c_2=13.3,\ c_3=8.3,\ c_4=13.5,\ c_5=11.6$$

گام ٤) از مقادیر c_i برای رتبه‌بندی اساتید استفاده می‌کنیم:

$$x_4 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_3$$

بنابراین، بهترین استاد در میان این پنج نفر، استاد چهارم است.

۸-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه با تکنیکهای تلفیق عبارات زبانی دو بعدی[1]

۸-٤-۱ عبارات زبانی دو بعدی

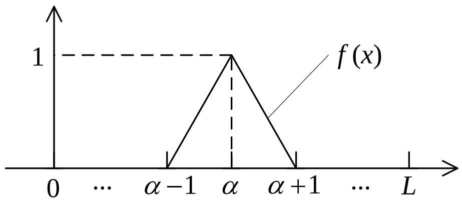
در این بخش به معرفی برخی مفاهیم پایه‌ای مانند: نمایش زبانی دوتایی[2]، عبارت زبانی دوبُعدی[3] و برخی عملگرهای معمولی تلفیق می‌پردازیم.

[1] Yu et al. (2012)
[2] 2-Tuple Linguistic Representation
[3] 2-Dimension Linguistic Label

به طور کلی، یک عبارت یا برچسب زبانی را می‌توان به وسیله یک تابع عضویت مثلثی[۱] ، کمّی‌سازی کرد یعنی از وضعیت کیفی به وضعیت کمّی تبدیل کرد. برای مثال، عبارت زبانی s_α از مجموعه $S=\{s_\alpha \mid \alpha=0, 1, ..., L\}$ را می‌توان به شکل زیر کمّی‌سازی نمود:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x-\alpha+1, & \alpha-1\le x<\alpha \\ -x+\alpha+1, & \alpha\le x\le\alpha+1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

که تابع فوق، مدل نمایش تابع عضویت مثلثی آن عبارات زبانی است (شکل (۸-۴) را ببینید) است. برای راحتی در محاسبات، فرض می‌کنیم $x<0$ و $x>L$ امکان‌پذیر است.



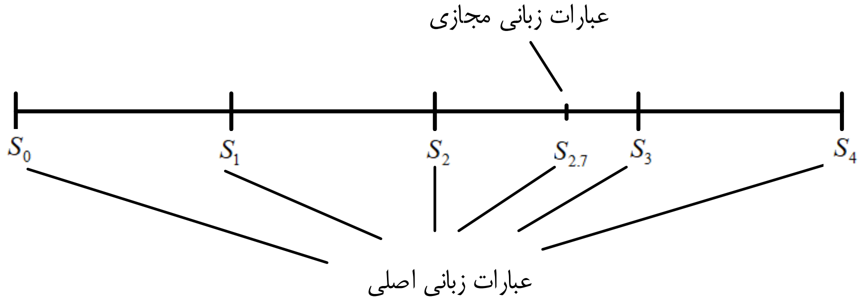
شکل ٤-۸ تابع عضویت مثلثی برای عبارت زبانی s_α

با توجه به اطلاعات زبانی فازی، عمدتاً چهار دسته‌بندی در مورد مدلهای محاسباتی وجود دارند: (۱) مدلهای محاسباتی زبانی که از اصل توسعه در میانگین حسابی فازی استفاده می‌کنند؛ (۲) مدلهای محاسباتی نمادین زبانی[۲] که بر اساس مقیاسهای ترتیبی هستند؛ (۳) مدلهای محاسباتی زبانی دوتایی[۳] بر اساس ترکیب عبارت زبانی و مقادیر عددی و (۴) مدلهای محاسباتی مستقیم زبانی[۴] بر اساس عبارات زبانی مجازی. در ادامه، به طور خلاصه به معرفی مدلهای محاسباتی سوم و چهارم می‌پردازیم:

یک مجموعه عبارت زبانی پیوسته $\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha\in[0, L]\}$ بر اساس مجموعه عبارت زبانی S را در نظر بگیرید. حال، اگر مجموعه عبارت زبانی S ، پنج عضو داشته باشد، می‌توانیم شکل پیوسته آن را به صورت

[1] Triangular Membership Function
[2] Linguistic Symbolic Computational Models
3 2-Tuple Linguistic Computational Models
[4] Direct Linguistic Computational Models

$\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha\in[0, 4]\}$ نمایش دهیم. در این مورد، s_α یک عبارت زبانی مجازی برای $\alpha\in[0, 4]/\{0, 1, 2, 3, 4\}$ یا یک عبارت زبانی اصلی برای $\alpha=0, 1, 2, 3, 4$ است. (شکل شماره (۸–۵))



شکل ۵–۸ مجموعه عبارت زبانی پیوسته $\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha\in[0, 4]\}$

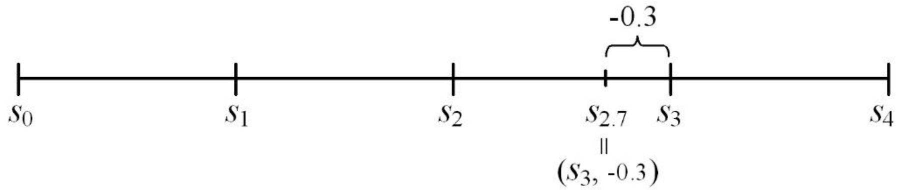
همانطور که می‌دانیم، هر "عبارت زبانی اصلی" برای نشان دادن اطلاعات زبانی همچون «ضعیف»، «متوسط»، «عمیقاً خوب» و امثال آن به کار می‌رود، ولی یک "عبارت زبانی مجازی" معنای واقعی ندارد و تنها از آن بعنوان یک نماد محاسباتی استفاده می‌شود. بر اساس مفهوم عبارات زبانی مجازی و عبارات زبانی اصلی، می‌توان عمل محاسبه با واژگان را تنها با استفاده از اندیس (شاخص) آن عبارات زبانی انجام داد. آنچه ذکر شد، ایده اصلی چهارمین مدل محاسباتی است. علاوه بر این، بین عبارات زبانی مجازی و عبارت زبانی دوتایی متناظر، رابطه‌ای وجود دارد.

یک دوتایی[1] زبانی (s_i, β) به ازای $i=0, 1, 2..., L$ برای نشان دادن اطلاعات زبانی درون یک مجموعه عبارت زبانی $S=\{s_\alpha \mid \alpha=0, 1, ..., L\}$ به کار می‌رود (هررا و مارتینز، (۲۰۰۱)[2])، که در آن s_i یک عبارت یا برچسب زبانی و β یک مقدار عددی است که نشان‌دهنده ترجمه نمادین[3] آنست. یک دوتایی (s_i, β) در صورتیکه مقادیر $i=round(\alpha)$ و $\beta=\alpha-i$ باشد، معادل یک عبارت زبانی مجازی

---

[1] Tuple
[2] Herrera and Martínez (2001)
[3] Symbolic Translation

$s_\alpha \in \bar{S}$ می‌باشد به قسمی که $\bar{S} = \{s_\alpha \mid \alpha \in [0, L]\}$ است. در این مورد، می‌توان میان عبارات زبانی مجازی و اطلاعات زبانی دوتایی، نوعی ارتباط ایجاد کرد (شکل (۸–۶)):



شکل ٦–۸ رابطه بین عبارت زبانی مجازی و اطلاعات زبانی دو تایی

ژوو و همکاران[1] معتقدند رویکردهای سنتی فازی برای عبارات زبانی نمی‌توانند از اطلاعات ارزیابی زبانی استفاده کافی ببرند. (بدلیل آنکه وابسته به قضاوتهای ذهنی تصمیم‌گیرنده بوده و مستلزم عدم اطمینان و اعتماد هستند). بنابراین، نوعی عبارات زبانی جدید دو بعدی پیشنهاد شد که شامل دو بخش می‌باشد:

۱) اطلاعات ارزیابی اصلی (PAI)[2] : برای ارزیابی گزینه‌ها یا اشیاء

۲) اطلاعات خود ارزیابی[3] : برای نشان دادن درجه اطمینان به PAI (یا همان اطلاعات ارزیابی اصلی).

در این مدل، ابتدا اطلاعات ارزیابی زبانی دو بعدی در چارچوب منطق شهودی ذهنی[4] بیان شده و سپس، یک روش تحلیل تناقض[5] برای بهبود قانون ترکیب[6] به منظور تلفیق منطقی اطلاعات ارزیابی زبانی دو بعدی بکار گرفته می‌شود. علاوه بر آن، یک قاعده خاص مقایسه‌ای برای رتبه‌بندی گزینه‌های تصمیم ایجاد شده است. همانطور که می‌دانیم، اطلاعات زبانی، فازی هستند و اطلاعات زبانی معمولی، به صورت زیرمجموعه‌های فازی نوع z (همانند عدد فازی مثلثی در شکل (۸–۴)) نشان داده می‌شوند. بنابراین، ما میزان فازی بودن اطلاعات زبانی دو بعدی را تحلیل می‌کنیم تا میان اطلاعات زبانی دو

---

[1] Zhu et al. (2009)
[2] Principal Assessment Information (PAI)
[3] Self-Assessment Information
[4] Subjective Evidential Reasoning
[5] Conflict Analysis Method
[6] Combination Rule

بعدی و اطلاعات زبانی معمولی تمایز ایجاد کنیم، کاری که در منابع دیگر انجام نشده است[۱] (ژو و همکاران، (۲۰۰۹)[۲]). مشابه سایر اطلاعات فازی، می‌توان چند عملگر تلفیق مرتبط به منظور اِعمال اطلاعات زبانی دو بعدی بر روی مدلهای *MADM* توسعه داد، که این نیز در نوع خود جدید محسوب می‌شود (ژو و همکاران، (۲۰۰۹)).

در ادامه، ابتدا تعریفی از عبارت زبانی دو بعدی را برای نشان دادن اطلاعات زبانی دو بعدی ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱-۸ (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)[۳]) فرض کنید دو مجموعه عبارت زبانی زیر وجود دارند:

$$S=\{s_\alpha \mid \alpha=0, 1, ..., L\},\ \ S'=\{s'_\beta \mid \beta=0, 1, ..., L'\}$$

که هر دو τ و τ'، اعداد مثبت صحیح هستند. دو مجموعه فوق را به صورت پیوسته تبدیل می‌کنیم. به عبارتی، داریم $\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha\in[0, L]\}$ و $\bar{S}'=\{s'_\beta \mid \beta\in[0, L']\}$. سپس، یک عبارت زبانی دو بعدی[۴] (*2DLL*) که عبارات زبانی دو بعدی اصلی نیز نامیده می‌شود، به صورت $< s'_\beta,\ s_\alpha >$ فرموله می‌شود که عبارت ارزیابی اصلی $s_\alpha \in S$ نشان‌دهنده "اطلاعات ارزیابی اصلی" هستند و عبارت خودارزیابی $s'_\beta \in S'$ نشان‌دهنده "اطلاعات خودارزیابی" است. اگر $s'_\beta \in \bar{S}'$ و $s_\alpha \in \bar{S}$ باشد، آنگاه $< s'_\beta,\ s_\alpha >$ را *2DLL* پیوسته می‌نامند. به صورت خاص $< s'_\beta,\ s_\alpha >$ در صورتیکه یک *2DLL* پیوسته باشد (ولی نه یک *2DLL* اصلی) یک *2DLL* مجازی نامیده می‌شود.

توضیح ۱-۸ اگر هیچ ابهامی وجود نداشت، *2DLL*ها یا می‌توانند نشان‌دهنده *2DLL*های اصلی یا *2DLL*های پیوسته باشند.

---

[۱] غضنفری و نوجوان سالها قبل، ایده نسبتا مشابهی را مطرح و تحقیقات خود را در دو مقاله زیر به زبان فارسی انتشار دادند.

الف) "توسعه یک مدل MADM دو بعدی با استفاده از شاخص CF" فصلنامه امیرکبیر، زمستان ۱۳۸۰، دوره ۱۳، شماره ۴۹، از صفحه ۳۶ تا صفحه ۴۵.

ب) "توسعه مدل MADM دوبعدی با استفاده از شاخص درجه اطمینان فازی" نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید (فارسی)(نشریه بین المللی علوم مهندسی) پاییز ۱۳۸۵، دوره ۱۷، شماره ۴، از صفحه ۲۳ تا صفحه ۳۱.

[2] Zhu et al. (2009)

[3] Yu et al. (2012)

[4] 2-Dimension Linguistic Label (2DLL)

طبق تعریف فوق، اطلاعات ارزیابی می‌تواند به دو بخش تقسیم شوند: یکی عبارت ارزیابی اصلی روی شیء نشان داده شده به وسیله s_α و دیگری درجه اطمینان به ارزیابی اصلی نشان داده شده به وسیله s'_β وقتی یک خبره برخی گزینه‌ها را بر اساس $2DLL$ها در فرآیند تصمیم‌گیری ارزیابی می‌کند، باید عدم قطعیت مسئله تصمیم‌گیری و عدم قطعیت ذهنی تصمیم‌گیرندگان دخیل در امر تصمیم‌گیری را به منظور بهبود و منطقی بودن نتایج ارزیابی به حساب آورد.

مشابه عبارات ارزیابی معمولی (شکل (۸-۴))، هر $2DLL$ می‌تواند به وسیله تابع عضویت مثلثی کمی‌سازی شود. فرض کنید دو مجموعه عبارت زبانی $S=\{s_\alpha \mid \alpha=0,1,\ldots,L\}$ و $S'=\{s'_\beta \mid \beta=0,1,\ldots,L'\}$ را داریم که شکل پیوسته آنها به ترتیب به صورت $\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha=[0,L]\}$ و $\bar{S}'=\{s'_\beta \mid \beta=[0,L']\}$ می‌باشد. آنگاه طبق تعریف (۸-۱)، یک مجموعه از $2DLL$ها را به صورت $E=\{\delta=<s'_\beta,\ s_\alpha> \mid s'_\beta\in S' \ \wedge\ s_\alpha\in S\}$ با فرم پیوسته $\bar{E}=\{\delta=<s'_\beta,\ s_\alpha> \mid s'_\beta\in \bar{S}' \ \wedge\ s_\alpha\in \bar{S}\}$ تعریف می‌کنیم. در این مورد، هر کدام از عناصر مجموعه‌های E و $\bar{E}$ را می‌توان به وسیله تابع عضویت مثلثی کمی‌سازی کرد. برای مثال، یک $2DLL$ به صورت $\delta=<s'_\beta, s_\alpha>$ را می‌توان به شکل زیر کمی‌سازی نمود: (شکل (۸-۴))

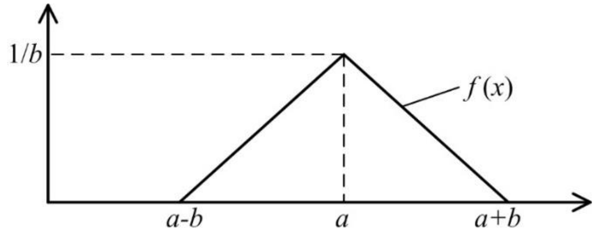
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a+b}{b^2}, & a-b\le x<a\\[2mm] \dfrac{-x+a+b}{b^2}, & a\le x\le a+b\\[4mm] 0, & otherwise\end{cases}$$

که مقادیر $a=\alpha$ و $b=\sqrt{1+\dfrac{3L^2}{2\cdot 4^i}}\ (i=\dfrac{\beta}{L'-\beta})$ می‌باشد. به عبارتی، هر $2DLL$ می‌تواند به وسیله یک عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته[1] (*TFN* تعمیم یافته) (چن، (۱۹۸۵)[2]) نشان داده شود. به عنوان مثال، چندتایی $\delta=<s'_\beta, s_\alpha>$ می‌تواند به وسیله یک عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته

---

[1] Generalized Triangular Fuzzy Number (Generalized TFN)
[2] Chen (1985)

$\tilde{t} = \left(a-b,\ a, a+b;\ \frac{1}{b} \right)$ نمایش داده شــود. اعداد فازی مثلثی موارد خاصــی از اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته هستند (چن، (١٩٨٥))، چون مقدار بیشینه عضویت در اعداد مثلثی فازی برابر یک است، ولی در اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته بین صــفر و یک اســت. یعنی اگر مقدار بیشــینه تابع عضــویت یک عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته برابر یک باشد، آنگاه عدد فازی مثلثی تعمیم یافته باید یک عدد فازی باشد.



شکل ٧-٨ عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته برای یک *2DLL*

در این مورد، عبارات زبانی معمولی موارد خاصی از *2DLL*ها هستند. همانطور که در بالا نیز اشاره شد، یک عبارت زبانی معمولی می‌تواند به وسیله یک تابع عضویت مثلثی نشان‌داده شود، به عبارتی *TFN*. درست مانند عبارت زبانی s_α که می‌تواند به وسیله عدد مثلثی فازی $(\alpha-1,\ \alpha,\ \alpha+1)$ نشان داده شود. اگر مقدار $\beta = L'$ در $\delta = < s'_\beta, s_\alpha >$ باشد، آنگاه $a = \alpha$ و $b = \sqrt{1 + \frac{3L^2}{2 \cdot 4^{L'/(L'-L')}}} = 1$ خواهد بود. به عبارتی، *2DLL* $< s'_{L'}, s_\alpha >$ می‌تواند به صورت $(\alpha-1,\ \alpha, \alpha+1;\ 1)$ نشان داده شود، که همان فرم نمایش عبارت زبانی معمولی s_α را دارد. از این رو، هر عبارت زبانی تک‌بعدی (یا همان عبارت زبانی معمولی) s_α معادل یک $< s'_{L'}, s_\alpha >$ است. بنابراین، عبارات زبانی معمولی، حالت خاصی از *2DLL*ها هستند و از تکنیکهای تلفیق *2DLL*ها می‌توان برای تلفیق عبارات زبانی معمولی استفاده کرد.

در همین حال، توجه می‌کنیم که هرچه $\beta \in [0, L']$ بزرگتر باشد، مقدار $b = \sqrt{1 + \frac{3L^2}{2 \cdot 4^{\beta/(L'-\beta)}}}$ کوچکتر خواهد بود و در نتیجه عدد مثلثی فازی تعمیم‌یافته (*TFN*) عملا متناظر قطعی‌تری است که این امر با فازی بودن *2DLL*ها سازگار است.

اطلاعات زبانی دو بعدی در موارد بسیار زیادی بکار گرفته شده‌اند. برای مثال وقتی از یک خبره برای بررسی برخی پایان‌نامه‌های تحصیلات تکمیلی دعوت می‌شود، او پایان‌نامه‌ها را به وسیله کلمات مختلفی مانند «عالی، خوب، متوسط، ضعیف و بسیار ضعیف» نمره‌دهی می‌کند. بنابراین اطلاعات ارزیابی خبره در مورد پایان‌نامه‌ها را می‌توان به وسیله $2DLL$ها نمایش داد که در آن "اطلاعات ارزیابی اصلی" نشان‌دهنده نمره هر پایان‌نامه و "اطلاعات خودارزیابی" نشان‌دهنده درجه تسلط فرد خبره بر روی هر پایان‌نامه است. در این مورد، اطلاعات ارزیابی، جامع‌تر خواهند بود.

به بیان دقیق‌تر، نتیجه تلفیق چندین عبارت زبانی باید یک $2DLL$ باشد.

مثال ۵-۸ فرض کنید یک مجموعه از پنج عبارت زبانی داریم:

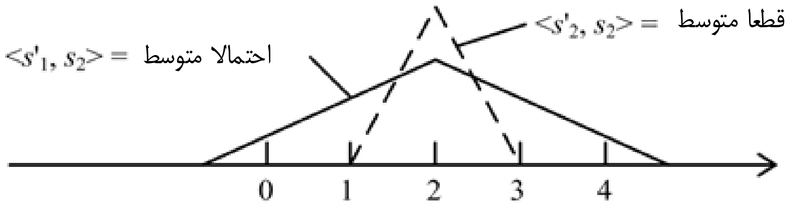
$S = \{$ s_0= شدیداً ضعیف ، s_1 = ضعیف ، s_2 = متوسط ، s_3 = خوب ، s_4 = عمیقاً خوب$\}$

و دو خبره (d_1 و d_2) دو گزینه (x_1 و x_2) را به وسیله عبارات زبانی در مجموعه S ارزیابی می‌کنند. گزینه x_1 به نظر فرد خبره اول «خوب» است ولی به نظر فرد خبره دوم «ضعیف» است، ولی نظر هر دو خبره در مورد x_2 «متوسط» است. اگر هر دو فرد خبره دارای اهمیت یکسانی باشند، آنگاه گزینه x_1 طبق مدلهای محاسباتی سوم و چهارم باید به خوبی x_2 باشد. در حقیقت، نتایج تلفیق گزینه x_2 باید برابر «قطعا متوسط» ولی برای x_1 شاید برابر «احتمالاً متوسط» است. در نتیجه، هرچند این خروجیها یکسان نیستند لیکن تفاوت بین آنها را نمی‌توان به وسیله مدلهای محاسباتی سنتی نشان داد. اگر یک مجموعه دیگر از سه عبارت زبانی داشته باشیم:

$S = \{$ s'_0 = غیرمحتمل ، s'_1 = احتمالاً ، s'_2 = قطعاً$\}$

آنگاه بر اساس تحلیلهای فوق، عبارات زبانی معمولی حالت خاصی از $2DLL$ها هستند و اطلاعات ارزیابی x_1 و x_2 نیز می‌توانند به صورت: به نظر فرد خبره اول «قطعاً خوب» ($< s'_2,\ s_3 >$) و «قطعاً متوسط» ($< s'_2,\ s_2 >$) و به نظر خبره دوم «قطعاً ضعیف» ($< s'_2,\ s_1 >$) و «قطعاً متوسط» ($< s'_2,\ s_2 >$) خواهند بود و نتایج تلفیق نظرات خبرگان نیز به این صورت خواهد بود: $< s'_1,\ s_2 >$ «احتمالاً متوسط» برای گزینه اول و $< s'_2,\ s_2 >$ (قطعاً متوسط) برای گزینه دوم. که این نتایج را می‌توان به وسیله توابع عضویت

مثلثی نشان داد (شکل (۸-۸)). مطابق این شکل و ویژگیهای زیرمجموعه‌های فازی، واضح است که $< s'_1,\ s_2 >$ غیرقطعی‌تر از $< s'_2,\ s_2 >$ است، چون تابع عضویت مثلثی آن دارای برد بیشتری است. در این مورد استفاده از $2DLL$ها به عنوان نتایج تلفیق دارای انطباق بیشتری با تفکر انسان است.



شکل ۸-۸ عبارات زبانی دو بعدی

از توصیفات فوق، نتیجه می‌گیریم که اطلاعات ارزیابی زبانی دو بعدی و تکنیکهای تلفیق آنها ارزش تحقیق عمیق‌تر را دارا می‌باشند. در ادامه، ابتدا به توسعه یک روش برای مقایسه عبارات زبانی دوبعدی ($2DLLI$ها) خواهیم پرداخت.

تعریف ۲-۸ (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)[1]) فرض کنید دو $2DLL$ به صورت‌های $\delta_1 =< s'_{\beta_1}, s_{\alpha_1} >$ و $\delta_2 =< s'_{\beta_2}, s_{\alpha_2} >$ وجود داشته باشند. . حال گزاره‌های زیر را خواهیم داشت:

۱) اگر $\alpha_1 < \alpha_2$ باشد، آنگاه δ_1 کوچکتر از δ_2 است و به صورت $\delta_1 < \delta_2$ نمایش داده می‌شود؛

۲) اگر $\alpha_1 = \alpha_2$ باشد،آنگاه خواهیم داشت:

I: اگر $\beta_1 = \beta_2$، آنگاه δ_1 معادل δ_2 است و به صورت $\delta_1 = \delta_2$ نمایش داده می‌شود؛

II: اگر $\beta_1 < \beta_2$، آنگاه δ_1 کوچکتر از δ_2 است و به صورت $\delta_1 < \delta_2$ نمایش داده می‌شود؛

III: اگر $\beta_1 > \beta_2$، آنگاه δ_1 بزرگتر از δ_2 است و به صورت $\delta_1 > \delta_2$ نمایش داده می‌شود؛

---

[1] Yu et al. (2012)

توضیح ۲-۸ در این فصل، اگر δ_1 بزرگتر از δ_2 نباشد، آنرا به صورت $\delta_1 \le \delta_2$ نمایش می‌دهیم، ولی اگر δ_1 کمتر از δ_2 نباشد، آن را به صورت $\delta_1 \ge \delta_2$ نمایش می‌دهیم.

سپس، یک جفت تابع برای انعکاس رابطه میان یک *2DLL* همچون $\delta =< s'_\beta, s_\alpha >$ از یک سو و عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظر (*TFN*) آن $\tilde{t} = \left(a-b,\ a,\ a+b;\ \dfrac{1}{b} \right)$ از سوی دیگر تشکیل می‌دهیم. به عبارتی، $a=\alpha$ و $b=\sqrt{1+\dfrac{3L^2}{2\cdot 4^i}}\ (i=\dfrac{\beta}{L'-\beta})$ می‌باشد. ψ را به عنوان نگاشت یک *2DLL* یعنی δ به روی عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته یعنی $\tilde{t}$ در نظر بگیرید، اگر $\tilde{t}=\psi(\delta)$ و $\delta=\psi^{-1}(\tilde{t})$، آنگاه ψ را تابع نگاشت بین یک *2DLL* و عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظر آن می‌نامیم. به خصوص با تحلیل روابط بین *2DLL*ها و اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته می‌توانیم تابع نگاشت ψ و تابع معکوس آن را به صورت زیر تشکیل دهیم:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \psi(\delta)=\psi(< s'_\beta, s_\alpha >)\\ &= \left(\alpha-\sqrt{1+\frac{3L^2}{2\cdot 4^i}},\ \alpha,\ \alpha+\sqrt{1+\frac{3L^2}{2\cdot 4^i}};\ 1\Big/\sqrt{1+\frac{3L^2}{2\cdot 4^i}} \right),\ i=\frac{\beta}{L'-\beta}\end{aligned} \tag{۸-۲۶}$$

و

$$\delta=\psi^{-1}(\tilde{t})=\psi^{-1}\left[\left(a-b,\ a,\ a+b;\ \frac{1}{b} \right) \right] =< s'_\beta, s_a > \tag{۸-۲۷}$$

که در آن $\beta=\dfrac{L'\cdot \log_4^{3L^2/2(b^2-1)}}{1+\log_4^{3L^2/2(b^2-1)}}$ می‌باشد.

در موارد خاص، هرچه مقدار $\alpha\in[0, L]$ بزرگتر باشد، a موجود در عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظر آن (یا *TFN* تعمیم‌یافته) بزرگتر خواهد بود و برعکس. ولی هرچه مقدار $\beta\in[0, L']$ بیشتر باشد، مقدار $b\in[1, +\infty)$ کوچکتر است و بالعکس. دلیل این امر آن است که اگر یک تابع f داشته باشیم که $b=f(\beta)=\sqrt{1+\dfrac{3L^2}{2\cdot 4^{\beta/(L-\beta)}}}$ را ارضا کند، آنگاه می‌توانیم تابع مشتق متناظر آن را محاسبه کنیم:

$$f'(\beta)=\frac{-3\cdot\ln 4\cdot L^2\cdot L'\cdot 4^{\beta/(L'-\beta)}}{4\cdot(L'-\beta)^2\cdot\sqrt{1+\frac{3L^2}{2\cdot 4^{\beta/(L'-\beta)}}}}$$

و اگر $\beta\in[0, L']$ باشد، آنگاه $f'(\beta)<0$ خواهد بود. بنابراین، f در دامنه نشانوندهایش اکیداً یکنوا و نزولی است. به طور مشابه، تابع معکوس f به شکل زیر است:

$$\beta=f^{-1}(b)=\frac{L'\cdot\log_4^{3L^2/2(b^2-1)}}{1+\log_4^{3L^2/2(b^2-1)}}$$

که این تابع نیز در دامنه نشانوندهایش $b\in[1, +\infty)$ اکیداً یکنوا و نزولی است. بنابراین، هرچه β بزرگتر باشد، b در نواحی شدنی‌اش کوچکتر است و بالعکس. در این مورد، روابط نگاشتی می‌توانند معقولانه باشند. هرچه $2DLL$ بزرگتر باشد، عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظر آن بزرگتر است. به همین صورت، هرچه یک $2DLL$ فازی‌تر باشد، عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظر آن فازی‌تر است.

٨-٤-٢ تصمیم‌گیری چندشاخصه با عملگر *2DLWA*

مطابق با تابع رابطه و معکوس آن، می‌توان به آسانی یک $2DLL$ را به یک عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین، اگر روشی برای تلفیق چندین عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته وجود داشته باشد، پس با آن روش می‌توان $2DLL$ها را نیز تلفیق کرد.

تعریف ٨-٣ (یوو و همکاران، (٢٠١٢)[١]) فرض کنید $\tilde{t}_i=\left(a_i-b_i,\, a_i,\, a_i+b_i;\ \frac{1}{b_i}\right)$ به ازای $(i=1, 2, ..., 3)$، دسته‌ای از اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته باشد و اگر:

$$a=f_s^{(w)}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i a_i \qquad (٨-٢٨)$$

[1] Yu et al. (2012)

باشد و نیز

$$b = f_h^{(w)}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \left[6(a_i - a)^2 + b_i^2 \right]} \qquad (۸-۲۹)$$

باشد، که $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن $\tilde{t}_i$ است و در آن $w_i \in [0, 1]\ (i = 1, 2, ..., n)$ بوده و $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ می‌باشد، آنگاه f_s را یک تابع تلفیق امتیازی[1] و f_h را یک تابع تلفیق تردید[2] می‌نامیم. اگر داشته باشیم $\tilde{t} = \left(a-b, a, a+b; \dfrac{1}{b} \right)$، آنگاه آن را یک عدد فازی مثلثی تعمیم یافته کلی[3] از $\tilde{t}_i (i = 1, 2, ..., 3)$ می‌نامیم. برای راحتی، $\bar{\nabla}$ را به عنوان نماد کلی همه *2DLL*های پیوسته در نظر بگیرید.

تعریف ۸-۴ (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)[4]) فرض کنید $\delta_i = < s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} > (i = 1, 2, ..., n)$ دسته‌ای از *2DLL*ها بوده و همچنین داشته باشیم $2DLWA: \bar{\nabla}^n \to \bar{\nabla}$، حال اگر داشته باشیم:

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1} \left[(a-b, a, a+b; \frac{1}{b}) \right] \qquad (۸-۳۰)$$

که در آن

$$a = f_s^{(w)} \left(\psi(\delta_1), \psi(\delta_2), ..., \psi(\delta_n) \right)$$
$$b = f_h^{(w)} \left(\psi(\delta_1), \psi(\delta_2), ..., \psi(\delta_n) \right)$$

بوده و $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن به ازای $w_i > 0$ است و $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ می‌باشد. آنگاه تابع *2DLWA*، عملگر میانگین وزنی زبانی دو بعدی[5] (*2DLWA*) نامیده می‌شود.

---

[1] Score Aggregation Function
[2] Hesitant Aggregation Function
[3] Overall Generalized TFN
[4] Yu et al. (2012)
[5] 2-Dimension Linguistic Weighted Average (2DLWA)

مثال ٦-٨ فرض کنید:

$$\bar{\nabla}=\left\{ \delta=<s'_{\beta},\, s_{\alpha}>| s_{\alpha}\in\{s_i \mid i\in[0,\,4]\}\wedge s'_{\beta}\in\{s_j \mid j\in[0,\,2]\}\right\}\ (L=4,\ L'=2)$$

یک مجموعه $2DLL$ است، سه $2DLL$ به نامهای $\delta_1=<s'_1,\, s_1>$، $\delta_2=<s'_0,\, s_3>$ و $\delta_3=<s'_2,\, s_4>$ به $\bar{\nabla}$ تعلق دارند و $w=(0.3,\ 0.3,\ 0.4)$ بردار وزن $2DLL$ها به ازای $\delta_i(i=1,2,3)$ است. به وسیله تابع نگاشت ψ که به آن اشاره شد، ابتدا $2DLL$ها را به اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته متناظرشان تبدیل می‌کنیم:

$$\tilde{t}_1=\psi(\delta_1)=(-1.65,\ 1,\ 3.65;\ 0.38)\quad \tilde{t}_2=\psi(\delta_2)=(-2,\ 3,\ 8;\ 0.2)$$
$$\tilde{t}_3=\psi(\delta_3)=(3,\ 4,\ 5;\ 1)$$

با استفاده از تابع تلفیق امتیازی و تابع تلفیق تردید در تعریف (٨-٣)، عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته کلی $\tilde{t}=(-1.49,\, 2.8,\, 7.09;\, 0.233)$ را محاسبه می‌کنیم. مطابق تابع معکوس ψ^{-1}، می‌توانیم مقدار میانگین وزنی سه $2DLL$ فوق را بدست آوریم:

$$\delta=2DLWA_w(\delta_1,\,\delta_2,\,\delta_3)=\psi^{-1}(\tilde{t})=<s'_{0.377},\, s_{2.8}>$$

آنگاه نتیجه نهایی تلفیق $\delta_1,\ \delta_2$ و δ_3 برابر $<s'_{0.377},\, s_{2.8}>$ خواهد بود.

مثال ٧-٨ عبارات زبانی معمولی در مثال (٨-٥) را در نظر گیرید، تصمیم‌گیرنده اول یعنی d_1 گزینه x_1 را در حد s_3 و گزینه x_2 را به عنوان s_2 ارزیابی می‌کند و تصمیم‌گیرنده دوم یعنی d_2، گزینه اول را به عنوان s_1 و گزینه دوم را در حد s_2 ارزیابی می‌کند. اگر دو تصمیم‌گیرنده دارای اهمیت یکسان باشند ($\lambda=(0.5,\,0.5)$)، آنگاه می‌توانیم مقادیر ارزیابی کلی آنها را با استفاده از عملگر EWA محاسبه کنیم. در این مورد خواهیم داشت:

$$z_1(\lambda)=s_{0.5\times3+0.5\times1}=s_2,\quad z_2(\lambda)=s_{0.5\times2+0.5\times2}=s_2$$

بنابراین، $z_1(\lambda)=z_2(\lambda)$، یعنی نمی‌توان بین گزینه اول و دوم گزینه‌ای را انتخاب کرد. ولی اگر عبارات زبانی معمولی فوق را به $2DLL$ متناظرشان با ایجاد یک مجموعه عبارت زبانی دیگر که در مثال (٨-٥) بررسی شد تبدیل کنیم (به عبارتی، d_1 گزینه اول را به صورت $<s'_2,\, s_3>$ و گزینه دوم را به صورت

$< s'_2, s_2 >$ ارزیابی کند و d_2 گزینه اول را به صورت $< s'_2, s_1 >$ و گزینه دوم را به صورت $< s'_2, s_2 >$ ارزیابی کند) آنگاه می‌توانیم مقادیر کلی ارزیابی آنها را به وسیله عملگر *2DLWA* مذکور محاسبه کرد. در این حالت داریم:

$$z_1(\lambda) =< s'_1, s_2 > \quad z_2(\lambda) =< s'_2, s_2 >$$

بنابراین $z_1(\lambda) < z_2(\lambda)$ است که با نتایج مثال (۸–۵) همخوانی دارد. پیرامون ویژگیهای عملگر *2DLWA* داریم:

قضیه ۸–۱ (**یگانگی**) فرض کنید $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} > (i=1, 2, ..., n)$ یک دسته از *2DLL*ها باشند و $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزنی δ_i با ویژگی $w_i > 0$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ باشد. اگر تمام δ_i برابر باشند، به عبارتی به ازای هر i داشته باشیم $\delta_i = \delta$، آنگاه:

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \delta \qquad (۸–۳۱)$$

اثبات $\tilde{t}_i = \psi(\delta_i)(i=1, 2, ..., n)$ و $\tilde{t} = \psi(\delta)$ را در نظر بگیرید، آنگاه $\delta_i = \psi^{-1}(\tilde{t}_i)$ و $\delta = \psi^{-1}(\tilde{t})$ خواهند بود. از آنجاکه به ازای هر i داریم $\delta_i = \delta$، آنگاه به ازای هر i داریم $\tilde{t}_i = \tilde{t}$. فرض کنید $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 = \cdots = \tilde{t}_n = \tilde{t} = \left(a-b, a, a+b; \frac{1}{b} \right)$ باشد، آنگاه:

$$f_s^{(w)}\left(\psi(\delta_1), \psi(\delta_2), ..., \psi(\delta_n)\right) = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i a = a$$

و

$$f_h^{(w)}\left(\psi(\delta_1), \psi(\delta_2), ..., \psi(\delta_n)\right) = f_h^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \left[6(a-a)^2 + b^2 \right]} = b$$

بنابراین

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a-b, a, a+b; \frac{1}{b} \right) \right] = \psi^{-1}(\tilde{t}) = \delta$$

قضیه ۲-۸ (**کرانداری**) فرض کنید $\bar{\nabla}=\{\delta_i \mid \delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >, \ i=1, 2, ..., n\}$ دسته‌ای از $2DLL$ها بوده و نیز فرض کنید $\delta^- = \min_i\{\delta_i\} =< s'_{\beta^-}, s_{\alpha^-} >$ و $\delta^+ = \max_i\{\delta_i\} = < s'_{\beta^+}, s_{\alpha^+} >$ باشند، به عبارتی $\delta^-, \delta^+ \in \bar{\nabla}$ و به ازای هر i داشته باشیم $\delta^- \le \delta_i$ و $\delta^+ \ge \delta_i$ آنگاه:

$$\delta^- \le 2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \le \delta^+ \qquad (۸-۳۲)$$

اثبات گیریم:

$$\tilde{t}^- = \psi(\delta^-) = \left(a^- - b^-, a^-, a^- + b^-; \ \frac{1}{b^-} \right)$$

$$\tilde{t}^+ = \psi(\delta^+) = \left(a^+ - b^+, a^+, a^+ + b^+; \ \frac{1}{b^+} \right)$$

$$\tilde{t}_i = \psi(\delta_i) = \left(a_i - b_i, a_i, a_i + b_i; \ \frac{1}{b_i} \right) \quad i=1, 2, ..., n$$

ابتدا سمت چپ معادله (۸-۳۲) را اثبات می‌کنیم:

۱) اگر به ازای هر i داشته باشیم $\alpha^- = \alpha_1 = \alpha_2 ... = \alpha_n$ و $\beta^- \le \beta_i$، آنگاه با توجه به ویژگی تابع نگاشت ψ مذکور، خواهیم داشت $a^- = a_1 = a_2 ... = a_n$ و $b^- \ge b_i$. بر اساس تعریف (۸-۳) می‌توانیم

$$a = f_s^{(w)} \left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n \right) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i = a^-$$

$$b = f_h^{(w)} \left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \left[6(a_i - a)^2 + b_i^2 \right]}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i b_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i (b^-)^2} = b^-$$

را محاسبه کنیم. سپس، با استفاده از معادله (۸-۲۷) خواهیم داشت $\alpha = \alpha^-$ و $\beta^- \le \beta$. بنابراین:

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a-b, \ a, \ a+b; \frac{1}{b} \right) \right] = \left\langle s'_\beta, s_\alpha \right\rangle \ \ge \delta^-$$

۲) اگر به ازای هر i داشته باشیم $\alpha^- \le \alpha_i$ و $(k \in \{1, 2, ..., n\})$ $\alpha_k > \alpha^-$ هایی نیز وجود داشته باشند، آنگاه با استفاده از معادله (۸-۲۶) خواهیم داشت $a^- \le a_i$، بنابراین:

$$a = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i > \sum_{i=1}^{n} w_i a^- = a^-$$

همچنین، با توجه به معادله (۸-۲۷) داریم $\alpha > \alpha^-$ و بنابر این:

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a-b, a, a+b; \frac{1}{b}\right)\right] = \left\langle s'_\beta, s_\alpha \right\rangle > \delta^-$$

با توجه به تحلیلهای انجام گرفته، می‌دانیم که نامساوی $2DLWA_w\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \ge \delta^-$ همواره صادق است. به طور مشابه، سمت راست معادله (۸-۳۲) نیز می‌تواند اثبات شود. در نتیجه می‌توانیم ویژگی کرانداری را اثبات کنیم:

$$\delta^- \le 2DLWA_w\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \le \delta^+$$

قضیه (۸-۳) (یکنوایی) مقادیر $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >$ و $\delta_i^* =< s'_{\beta_i^*}, s_{\alpha_i^*} >$ را در نظر بگیرید،که دو دسته از $2DLL$ها هستند. اگر به ازای هر i داشته باشیم $\delta_i \le \delta_i^*$ آنگاه:

$$2DLWA_w\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) \le 2DLWA_w\left(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*\right) \qquad (۸-۳۳)$$

اثبات

$$\tilde{t}_i = \psi(\delta_i) = \left(a_i - b_i, a_i, a_i + b_i; \frac{1}{b_i}\right) i = 1, 2, ..., n$$

$$\tilde{t}_i^* = \psi(\sigma_i^*) = \left(a_i^* - b_i^*, a_i^*, a_i^* + b_i^*; \frac{1}{b_i^*}\right) i = 1, 2, ..., n$$

دو مورد فوق را در نظر بگیرید.

۱) اگر داشته باشیم $\alpha_i = \alpha_i^*$ و $\beta_i \le \beta_i^*$، با استفاده از معادله (۸-۲۶) داریم $a_i = a_i^*$ و $b_i \ge b_i^*$. در این مورد می‌توانیم

$$a = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i^* = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*, ..., \tilde{t}_n^*\right) = a^*$$

$$b = f_h^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \left[\, 6(a_i - a)^2 + b_i^2 \,\right]}$$
$$\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \left[\, 6(a_i^* - a^*)^2 + b_i^{*2} \,\right]} = f_h^{(w)}\left(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*, ..., \tilde{t}_n^*\right) = b^*$$

را محاسبه کنیم و با توجه به معادله (۸–۲۷) خواهیم داشت $\alpha = \alpha^*$ و $\beta \leq \beta^*$. بنابراین

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a-b,\, a,\, a+b;\, \frac{1}{b}\right)\right] = < s'_\beta, s_\alpha >$$
$$\leq \left\langle s'_{\beta^*}, s_{\alpha^*} \right\rangle = 2DLWA_w\left(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*\right) = \psi^{-1}\left[\left(a^*-b^*,\, a^*,\, a^*+b^*;\, \frac{1}{b^*}\right)\right] \quad (۸–۳۴)$$

۲) اگر داشته باشیم $\alpha_i \leq \alpha_i^*$ و همچنین وجود داشته باشد $\alpha_k < \alpha_k^*$، آنگاه داریم:

$$a = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, ..., \tilde{t}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i < \sum_{i=1}^{n} w_i a_i^* = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*, ..., \tilde{t}_n^*\right) = a^*$$

رابطه

$$2DLWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = < s'_\beta, s_\alpha >$$

و

$$2DLWA_w(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*) = < s'_{\beta^*}, s_{\alpha^*} >$$

را در نظر بگیرید، آنگاه داریم $\alpha_i < \alpha_i^*$. بنابراین:

$$2DLWA_w\left(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\right) < 2DLWA_w\left(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*\right) \quad (۸–۳۵)$$

از تحلیلهای فوق نتیجه می‌گیریم که اگر به ازای هر i داشته باشیم $\delta_i \leq \delta_i^*$ آنگاه معادله (۸–۳۳) همواره صادق خواهد بود.

عملگر $2DLWA$ می‌تواند برای حل مسائل $MADM$ با اطلاعات زبانی نشان داده شده به وسیله «عبارات زبانی» یا «عبارات زبانی دو بعدی» استفاده شود. در ادامه به بررسی این روش می‌پردازیم:

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، دو مجموعه X و U را به ترتیب مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید و فرض کنید که دو مجموعه عبارت زبانی وجود دارند $S=\{s_\alpha \mid \alpha=0, 1, ..., L\}$ و $S'=\{s'_\beta \mid \beta=0, 1, ..., L'\}$. اطلاعات ارزیابی داده شده توسط تصمیم‌گیرنده (تصمیم‌گیرندگان) برای هر گزینه با توجه به هر شاخصه یا در قالب عبارات زبانی معمولی از مجموعه S است و یا از مجموعه $2DLL$ها که در هر کدام اطلاعات ارزیابی اصلی به وسیله عبارات زبانی موجود در S و اطلاعات خود ارزیابی به وسیله عبارات زبانی موجود در S' نمایش داده شده است.

گام ۲) تمام عبارات زبانی معمولی را به $2DLL$ تبدیل کنید، برای این کار از $s'_{L'}$ برای نشان دادن اطلاعات خودارزیابی آن برچسبهایی که این اطلاعات خودارزیابی را ندارند استفاده کنید. به عبارتی، هر عبارت زبانی معمولی s_α می‌تواند به یک $2DLL$ به صورت $< s'_{L'}, s_\alpha >$ تبدیل شود. حال می‌توان تمام اطلاعات ارزیابی را درون یک ماتریس از $2DLL$ها قرار داد که به صورت $\Upsilon=(\delta_{ij})_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود و هر عنصر δ_{ij} در این ماتریس یک $2DLL$ است که مقدار ارزیابی گزینه x_i با توجه به شاخصه‌های u_j را نشان می‌دهد.

گام ۳) از تابع نگاشت (۸–۲۶) برای تبدیل Υ به ماتریس اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته $T=(\tilde{t}_{ij})_{n\times m}$ استفاده نمائید.

گام ٤) مطابق اوزان شاخصه‌های داده شده $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ و تعریف (۸–۳)، مقادیر

$$a_i = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_{i1}, \tilde{t}_{i2}, ..., \tilde{t}_{im}\right) = \sum_{j=1}^{m} w_j a_{ij} (i=1, 2, ..., n)$$

و

$$b_i = f_h^{(w)}\left(\tilde{t}_{i1}, \tilde{t}_{i2}, ..., \tilde{t}_{im}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} w_j \left[6(a_{ij}-a_i)^2 + b_{ij}^2\right]} (i=1, 2, ..., n)$$

را محاسبه نمائید.

گام ۵) مقادیر ارزیابی کلی متناظر هر گزینه x_i را محاسبه کنید:

$$\delta_i = 2DLWA_w(\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{in}) = \psi^{-1}\left[\left(a_i - b_i, a_i, a_i + b_i; \frac{1}{b_i}\right)\right], (i = 1, 2, ..., m)$$

گام ٦) گزینه‌ها را بر اساس مقادیر ارزیابی کلی δ_i، به ازای $(i = 1, 2, ..., n)$، رتبه‌بندی کرده و گزینه(ها) مطلوب را انتخاب نمائید.

۸-٤-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه با عملگر *2DLOWA*

با الهام از ایده میانگین ترتیبی (یاگر، (۱۹۸۸)[1])، عملگر میانگین وزنی ترتیبی زبانی دو بعدی[2] (*2DLOWA*) به صورت زیر تعریف می‌شود (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)[3]):

تعریف ۵-۸ (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)) یک عملگر *2DLOWA* از مرتبه n، یک نگاشت به صورت $\bar{\nabla}^n \to \bar{\nabla}$ است که دارای بردار وزن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ است که در این بردار وزن $\omega_i \in [0,\ 1](i = 1, 2, ..., n)$ و $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ است. علاوه بر آن

$$2DLOWA_\omega\ (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a - b, a, a + b; \frac{1}{b}\right)\right] \tag{۸-۳۶}$$

که

$$a = f_s^{(\omega)}\ \left(\psi(\delta_{\sigma(1)}), \psi(\delta_{\sigma(2)}), ..., \psi(\delta_{\sigma(n)})\right)$$
$$b = f_h^{(\omega)}\ \left(\psi(\delta_{\sigma(1)}), \psi(\delta_{\sigma(2)}), ..., \psi(\delta_{\sigma(n)})\right)$$

---

[1] Yager (1988)
[1] 2-Dimension Linguistic Ordered Weighted Averaging Operator (2DLOWA)
[3] Yu et al. (2012)

و $(\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ یک جایگشت $(1, 2, ..., n)$ است به طوری که به ازای هر i داریم $\delta_{\sigma(i-1)} \geq \delta_{\sigma(i)}$. مشابه عملگر *2DLWA*، عملگر *2DLOWA* نیز دارای ویژگیهای زیر است (یوو و همکاران، (۲۰۱۲)):

قضیه ۸-۴ (**یگانگی**) فرض کنید $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} > (i=1, 2, ..., n)$ دسته‌ای از *2DLL*ها باشد و همچنین $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن عملگر *2DLOWA* با ویژگی‌های $\omega_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ باشد. اگر تمام δ_i برابر باشند، یعنی به ازای هر i داشته باشیم $\delta_i = \delta$، آنگاه:

$$2DLOWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \delta \tag{۸-۳۷}$$

قضیه ۸-۵ (**کرانداری**) $\bar{D} = \{\delta_i \mid \delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >, \ i=1, 2, ..., n\}$ را به عنوان دسته‌ای از *2DLL*ها در نظر بگیرید و فرض کنید $\delta^- = \min_i\{\delta_i\} =< s'_{\beta^-}, s_{\alpha^-} >$ و $\delta^+ = \max_i\{\delta_i\} =< s'_{\beta^+}, s_{\alpha^+} >$ باشند، به عبارتی به ازای هر i داریم $\delta^-, \delta^+ \in \bar{\nabla}$ و $\delta^+ \geq \delta_i$ و $\delta^- \leq \delta_i$، آنگاه:

$$\delta^- \leq 2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \leq \delta^+ \tag{۸-۳۸}$$

قضیه ۸-۶ (**یکنوایی**) دو دسته $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >$ و $\delta_i^* =< s'_{\beta_i^*}, s_{\alpha_i^*} >$ را به عنوان دو دسته از *2DLL*ها در نظر بگیرید. اگر به ازای هر i داشته باشیم $\delta_i \leq \delta_i^*$، آنگاه:

$$2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \leq 2DLOWA_\omega(\delta_1^*, \delta_2^*, ..., \delta_n^*) \tag{۸-۳۹}$$

قضیه ۸-۷ (**شرکت‌پذیری**[1]) دو دسته $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >$ و $\delta_i^* =< s'_{\beta_i^*}, s_{\alpha_i^*} >$ را به عنوان دو دسته از *2DLL*ها در نظر بگیرید، آنگاه

$$2DLOWA_w(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = 2DLOWA_w(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, ..., \hat{\delta}_n) \tag{۸-۴۰}$$

---

[1] Commutativity

که $(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, ..., \hat{\delta}_n)$ هر جایگشتی از $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ است.

اثبات فرض کنید

$$2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = \psi^{-1}\left[\left(a-b, a, a+b; \frac{1}{b}\right)\right]$$
$$2DLOWA_\omega(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, ..., \hat{\delta}_n) = \psi^{-1}\left[\left(\hat{a}-\hat{b}, \hat{a}, \hat{a}+\hat{b}; \frac{1}{\hat{b}}\right)\right]$$

باشد که

$$a = f_s^{(\omega)}\left(\psi(\delta_{\sigma(1)}), \psi(\delta_{\sigma(2)}), ..., \psi(\delta_{\sigma(n)})\right),$$
$$b = f_h^{(\omega)}\left(\psi(\delta_{\sigma(1)}), \psi(\delta_{\sigma(2)}), ..., \psi(\delta_{\sigma(n)})\right)$$
$$\hat{a} = f_s^{(\omega)}\left(\psi(\hat{\delta}_{\sigma(1)}), \psi(\hat{\delta}_{\sigma(2)}), ..., \psi(\hat{\delta}_{\sigma(n)})\right),$$
$$\hat{b} = f_h^{(\omega)}\left(\psi(\hat{\delta}_{\sigma(1)}), \psi(\hat{\delta}_{\sigma(2)}), ..., \psi(\hat{\delta}_{\sigma(n)})\right)$$

از آنجا که $(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, ..., \hat{\delta}_n)$ هر جایگشتی از $(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ است، آنگاه داریم $\hat{\delta}_{\sigma(i)} = \delta_{\sigma(i)}$. بنابراین معادله (۸-۴۰) همواره صادق است.

قضیه ۸-۸ فرض کنید $\delta_i =< s'_{\beta_i}, s_{\alpha_i} >$ دسته‌ای از $2DLL$ها باشند و همچنین فرض کنید $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن عملگر $2DLOWA$ با ویژگیهای $\omega_i \in [0, 1]$ و $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ باشد، آنگاه:

۱) اگر $\omega_1 \to 1$، آنگاه $2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \to \max_i\{\delta_i\}$

۲) اگر $\omega_n \to 1$، آنگاه $2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \to \min_i\{\delta_i\}$

۳) اگر $\omega_i \to 1$، آنگاه $2DLOWA_\omega(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \to \delta_{\sigma(i)}$ که در آن $\delta_{\sigma(i)}$ iامین مقدار بزرگ $\delta_i (i = 1, 2, ..., n)$ است.

از تعاریف (۸–۴) و (۸–۵) می‌دانیم که عملگر *2DLWA*، مقادیر *2DLL*ها را وزن می‌دهد، در حالیکه عملگر *2DLOWA* موقعیت‌های ترتیبی *2DLL*ها را به جای خود *2DLL*ها وزن می‌دهد. مشابه روش (۲–۴–۸) یک روش *MADM* با استفاده از عملگر *2DLOWA* معرفی می‌کنیم:

گام ۱) مطابق روش بخش (۸–۴–۲) عمل کنید.

گام ۲) مطابق روش بخش (۸–۴–۲) عمل کنید.

گام ۳) مطابق روش رتبه‌بندی *2DLL*ها، تمام عناصر در هر سطر از Υ را به صورت نزولی مرتب کرده و ماتریس جدید $\hat{\Upsilon}=(\delta_{i,\sigma(j)})_{n\times m}$، که در آن $\delta_{i,\sigma(j)} \geq \delta_{i,\sigma(j+1)}(j=1, 2, ..., n-1)$ است، را به دست آورید.

گام ٤) از تابع نگاشت (۸–۲۶) برای تبدیل $\hat{\Upsilon}$ به ماتریس اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته $\hat{T}=(\tilde{t}_{i,\sigma(j)})_{n\times m}$ استفاده کنید.

گام ۵) مطابق تعریف (۸–۳) و اوزان عملگر *2DLOWA* یعنی $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ (که این اوزان یا داده شده یا محاسبه می‌شوند)، مقادیر زیر را محاسبه نمائید:

$$a_i = f_s^{(w)}\left(\tilde{t}_{i,\sigma(1)}, \tilde{t}_{i,\sigma(2)}, ..., \tilde{t}_{i,\sigma(m)}\right)=\sum_{j=1}^{m} w_j a_{i,\sigma(j)}, \;\; i=1, 2, ..., n$$

و

$$b_i = f_h^{(w)}\left(\tilde{t}_{i,\sigma(1)}, \tilde{t}_{i,\sigma(2)}, ..., \tilde{t}_{i,\sigma(m)}\right)$$

$$=\sqrt{\sum_{j=1}^{m} w_j\left[6(a_{i,\sigma(j)}-a_i)^2+b_{i,\sigma(j)}^2\right]}, (i=1, 2, ..., n)$$

گام ٦) مقادیر ارزیابی کلی متناظر هر گزینه x_i را محاسبه کنید:

$$\delta_i = 2DLOWA_w(\delta_{i1}, \delta_{i2}, ..., \delta_{im})=\psi^{-1}\left[\left(a_i-b_i, a_i, a_i+b_i; \frac{1}{b_i}\right)\right]$$

گام ۷) گزینه‌های x_i را مطابق مقادیر ارزیابی کلی δ_j رتبه‌بندی و گزینه مطلوب را انتخاب نمائید.

٤-٤-٨ مثال کاربردی

یک تصمیم‌گیرنده قصد انتخاب بهترین پایان‌نامه‌ها از میان چهار پایان‌نامه $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ تحصیلات تکمیلی را دارد. شاخصه‌های مورداستفاده در تصمیم‌گیری عبارتند از: (۱) u_1: خلاقیت در تحقیق، (۲) u_2: ترویج و توسعه علم، (۳) u_3: نتایج دقیق، (۴) u_4: ساختار مناسب و (۵) u_5: کیفیت نوشتار. تصمیم‌گیرنده ابتدا چهار پایان‌نامه را به وسیله عبارات زبانی ارزیابی می‌کند.

$S = \{$ s_0 = شدیداً ضعیف ، s_1 = ضعیف ، s_2 = متوسط ، s_3 = خوب ، s_4 = عالی$\}$

با در نظر گرفتن محتوای متفاوت پایان‌نامه‌ها و ساختار دانش تصمیم‌گیرندگان، تصمیم‌گیرنده باید میزان تسلطش بر هر جنبه (شاخصه) از پایان‌نامه‌ها را با استفاده از عبارات زبانی زیر اندازه‌گیری نماید:

$S' = \{$ s'_0 = ناآشنا ، s'_1 = متوسط ، s'_2 = چیره‌دست$\}$

بنابراین، $2DLL$ها برای نشان دادن اطلاعات ارزیابی مناسبتر هستند و همه مقادیر ارزیابی در ماتریس تصمیم زبانی $\Upsilon = (\delta_{ij})_{4\times 5}$ (مطابق جدول (۸-۱۳)) نشان داده شده‌اند:

جدول ۸-۱۳ ماتریس تصمیم زبانی Υ

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$< s'_2, s_1 >$	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_2 >$	$< s'_1, s_1 >$
x_2	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_2, s_4 >$	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_0, s_0 >$	$< s'_1, s_3 >$
x_3	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_1, s_1 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_2 >$
x_4	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_1, s_2 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_2, s_2 >$

در ادامه، ابتدا از روش ارائه شده در بخش (۸-۴-۲) برای به دست آوردن بهترین پایان‌نامه استفاده می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از تابع نگاشت (۸-۲۶)، ماتریس تصمیم فوق را به ماتریس اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته $T=(\tilde{t}_{ij})_{4\times 5}$ تبدیل می‌کنیم (مطابق جدول (۸-۱۴)):

جدول ۸-۱۴ ماتریس تصمیم T

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	(0, 1, 2; 1)	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1, 2, 3; 1)	(-1.65, 1, 3.65; 0.378)
x_2	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(3, 4, 5; 1)	(2, 3, 4; 1)	(-5, 0, 5; 0.2)	(0.354, 3, 5.65; 0.378)
x_3	(-2, 3, 8; 0.2)	(2, 3, 4; 1)	(-1.65, 1, 3.65; 0.378)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1, 2, 3; 1)
x_4	(2, 3, 4; 1)	(-0.646, 2, 4.65; 0.378)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(1, 2, 3; 1)

گام ۲) اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته کلی $(i=1, 2, 3, 4)$ $\tilde{t}_i=\left(a_i-b_i,\, a_i,\, a_i+b_i;\, \frac{1}{b_i}\right)$ را برای تمام اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته در هر سطر از T به وسیله تابع تلفیق امتیازی و تابع تلفیق تردید موجود در تعریف (۸-۳) و با در نظر گرفتن این امر که هر پنج جنبه (شاخصه‌ها) دارای اهمیت یکسان هستند محاسبه می‌کنیم. (به عبارتی بردار وزن پنج جنبه برای هر پایان نامه برابر $w=(0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2,\ 0.2)$ است).

$$\tilde{t}_1=\left(a_1-b_1,\, a_1,\, a_1+b_1;\, \frac{1}{b_1}\right)=\left(-1.84,\ 2.2,\ 6.24;\ 0.247\right)$$

$$\tilde{t}_2=\left(a_2-b_2,\, a_2,\, a_2+b_2;\, \frac{1}{b_2}\right)=\left(-1.8,\ 2.8,\ 7.4;\ 0.217\right)$$

$$\tilde{t}_3=\left(a_3-b_3,\, a_3,\, a_3+b_3;\, \frac{1}{b_3}\right)=\left(-1.55,\ 2.4,\ 6.35;\ 0.253\right)$$

$$\tilde{t}_4=\left(a_4-b_4,\, a_4,\, a_4+b_4;\, \frac{1}{b_4}\right)=\left(-0.6,\ 2.8,\ 6.2;\ 0.294\right)$$

گام ۳) مقادیر ارزیابی کلی متناظر هر گزینه x_i را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_1 =< s'_{0.487}, s_{2.2} >, \delta_2 =< s'_{0.223}, s_{2.8} >, \delta_3 =< s'_{0.526}, s_{2.4} >, \delta_4 =< s'_{0.744}, s_{2.8} >$$

گام ٤) مقادیر ارزیابی کلی را مطابق تعریف (۸-۲) رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$\delta_4 > \delta_2 > \delta_3 > \delta_1$$

که از روی این ارزیابی متوجه می‌شویم که چهارمین پایان‌نامه از سایر پایان‌نامه‌ها بهتر است. اما اگر وزن تصمیم‌گیرندگان داده نشود، نمی‌توان از روش ارائه شده در بخش (۸-۴-۲) برای حل مسئله انتخاب پایان‌نامه‌ها استفاده کرد. در این مورد از روش معرفی شده در بخش (۸-۴-۳) به‌منظور حل مسئله استفاده می‌کنیم.

گام ۱) تمام عناصر موجود در هر سطرح Υ را به صورت نزولی با روش رتبه‌بندی *2DLL*ها در تعریف (۸-۲) رتبه‌بندی کرده و سپس ماتریس جدید $\hat{\Upsilon} = (\delta_{i,\sigma(j)})_{4\times5}$ را بدست می‌آوریم. (مطابق جدول (۸-۱۵))

جدول ۱۵-۸ ماتریس تصمیم مرتب‌شده $\hat{\Upsilon}$

x_1	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_2 >$	$< s'_2, s_1 >$	$< s'_1, s_1 >$
x_2	$< s'_2, s_4 >$	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_1, s_3 >$	$< s'_0, s_0 >$
x_3	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_2 >$	$< s'_1, s_1 >$
x_4	$< s'_1, s_4 >$	$< s'_2, s_3 >$	$< s'_0, s_3 >$	$< s'_2, s_2 >$	$< s'_1, s_2 >$

گام ۲) به وسیله تابع نگاشت (۸-۲۶)، ماتریس تصمیم فوق را به ماتریس اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته $\hat{T} = (\tilde{t}_{ij})_{4\times5}$ تبدیل می‌کنیم (مطابق جدول (۸-۱۶)).

گام ۳) اوزان عملگر *2DLOWA* را مشخص می‌کنیم. در دنیای واقعی یک دسته nتایی از نشانوندها یا نشانوندهای $a_1, a_2, ..., a_n$ معمولاً فرم n مقدار ترجیح که توسط n فرد مختلف فراهم شده را به خود

می‌گیرند (ژوو، (۲۰۰۵)[1]). برخی افراد ممکن است مقادیر ترجیح خیلی بالا یا خیلی پایینی را به گزینه‌های مورد نظر خود تخصیص دهند. در این موارد، اوزان خیلی پایینی را به این نظرات «اشتباه» یا دارای «سوگیری[2] » می‌دهیم، یعنی هرچه مقدار یک ترجیح به مقدار متوسط نزدیکتر باشد، وزن بیشتری نیز می‌گیرد. عکس این قضیه نیز وجود دارد. در این مسئله می‌توان اوزان عملگر *2LOWA* را به صورت $\omega = (0.1,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.1)$ بر اساس ایده ژوو نشان داد.

جدول ۱۶-۸ ماتریس تصمیم $\hat{T}$

x_1	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1, 2, 3; 1)	(0, 1, 2; 1)	(-1.65, 1, 3.65; 0.378)
x_2	(3, 4, 5; 1)	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(2, 3, 4; 1)	(0.354, 3, 5.65; 0.378)	(-5, 0, 5; 0.2)
x_3	(2, 3, 4; 1)	(-2, 3, 8; 0.2)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1, 2, 3; 1)	(-1.65, 1, 3.65; 0.378)
x_4	(1.35, 4, 6.65; 0.378)	(2, 3, 4; 1)	(-2, 3, 8; 0.2)	(1, 2, 3; 1)	(-0.646, 2, 4.65; 0.378)

گام ٤) اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته کلی $\tilde{t}_i = \left(a_i - b_i,\, a_i,\, a_i + b_i;\, \frac{1}{b_i} \right)$ را برای تمام اعداد فازی مثلثی تعمیم یافته در هر سطر از $\hat{T}$ با استفاده از تابع تلفیق امتیازی و مردد در تعریف (۸-۳) محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{t}_1 = \left(a_1 - b_1,\, a_1,\, a_1 + b_1;\, \frac{1}{b_1} \right) = (-1.41,\ 2.1,\ 5.61;\ 0.285)$$

$$\tilde{t}_2 = \left(a_2 - b_2,\, a_2,\, a_2 + b_2;\, \frac{1}{b_2} \right) = (-0.61,\ 3,\ 6.61;\ 0.277)$$

$$\tilde{t}_3 = \left(a_3 - b_3,\, a_3,\, a_3 + b_3;\, \frac{1}{b_3} \right) = (-1.71,\ 2.6,\ 6.92;\ 0.232)$$

---

[1] Xu. (2005c)
[2] Biased

$$\tilde{t}_4 = \left(a_4 - b_4,\, a_4,\, a_4 + b_4;\, \frac{1}{b_4} \right) = \left(-0.94,\ 2.8,\ 6.54;\ 0.268 \right)$$

گام ۵) مقادیر ارزیابی کلی متناظر هر گزینه x_i را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_1 =< s'_{0.702},\, s_{2.1} >,\ \delta_2 =< s'_{0.667},\, s_3 >,\ \delta_3 =< s'_{0.363},\, s_{2.6} >,\ \delta_4 =< s'_{0.615},\, s_{2.8} >$$

گام ٦) مقادیر ارزیابی کلی را مطابق تعریف (۸-۲) رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$\delta_2 > \delta_4 > \delta_3 > \delta_1$$

که مشخص می‌شود دومین پایان‌نامه از سایر پایان‌نامه‌ها بهتر است.

در این مثال، در دو حالت متفاوت با مسئله انتخاب بهترین پایان‌نامه مواجه شده و با آن مقابله کردیم: یعنی اوزان خبرگان داده شده یا خیر. هنگامیکه اوزان خبرگان داده می‌شود با استفاده از روش ارائه شده در بخش (۸-۴-۲) درمی‌یابیم که بهترین پایان‌نامه، چهارمین آنهاست. اما اگر وزن خبرگان نامعلوم باشد دیگر نمی‌توان از روش ارائه شده در بخش (۸-۴-۲) استفاده کرد. برای حل مسئله در این شرایط، ابتدا می‌توانیم وزن موقعیتهای ترتیبی پارامترها را (با این فرض که هرچه آن پارامتر از مقادیر متوسط دورتر باشد، وزن کمتری می‌گیرد (ژوو، (۲۰۰۵)[1]))، محاسبه کنیم. سپس، با محاسباتی مطابق با روش موجود در بخش (۸-۴-۳) درخواهیم یافت که دومین پایان‌نامه، بهترین پایان‌نامه است. دلیل تفاوت این دو نتیجه، به کفایت و یا عدم‌کفایت شرایط اولیه مسئله برمی‌گردد. به هر حال، اگر اطلاعات اوزان و ارزیابی به صورت کامل فراهم شوند، می‌توان یک جواب قابل اتکا و منطقی را بدست آورد؛ در غیر اینصورت، جواب بدست آمده ممکن است تا حدی از مقدار دقیق و واقعی انحراف داشته باشد. چنین جوابی بعضاً فقط بعنوان یک نقطه مرجع قابل استفاده بوده و البته محتمل است در موارد خاصی، معنادار باشد.

[1] Xu. (2005c)

فصل نهم

حل مسائل $MADM$ مبتنی بر اطلاعات خالص زبانی[1]

در این فصل ابتدا به معرفی مفاهیم عملگر بیشینه وزنی زبانی[2](LWM) و میانگین وزنی زبانی ترکیبی[3] ($HLWA$) خواهیم پرداخت. سپس برای حل آن دسته از مسائل $MADM$ که در آنها اوزان شاخصه‌ها و مقادیر شاخصه‌ها به صورت عبارات زبانی بیان می‌شوند، روش $MADM$ مبتنی بر عملگر LWM را معرفی کرده و برای همین مسائل هنگامیکه بصورت $MAGDM$ هستند روشهایی بر اساس عملگرهای LWM و $HLWA$ را توسعه خواهیم داد. در ادامه، روشهای فوق را برای حل مسائل کاربردی همچون انتخاب شریک برای یک شرکت مجازی و نیز ارزیابی کیفیت معلمان استفاده خواهیم کرد.

[1] MADM Method Based on Pure Linguistic Information
[2] Linguistic Weighted Max (LWM)
[3] Hybrid Linguistic Weighted Averaging (HLWA)

۱-۹ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر بیشینه وزنی زبانی

۱-۱-۹ عملگر LWM

تعریف ۱-۹ (ژو، (۲۰۰۵)[1]) فرض کنید که $(a_1, a_2, ..., a_n)$ دسته‌ای از نشانوندهای زبانی باشند، حال اگر داشته باشیم:

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{w_i, a_i\}$$

که در آن $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن نشانوندهای زبانی $a_i (i = 1, 2, ..., n)$ است و $a_i, w_i \in S$ می‌باشد، آنگاه، تابع LWM، عملگر بیشینه وزنی زبانی (یا عملگر LWM) نامیده می‌شود که شکل توسعه یافته‌ای از عملگر بیشینه وزنی (یا عملگر WM) (دبویز و پرید، (۱۹۸۶)[2]) می‌باشد.

مثال ۱-۹ فرض کنید $w = (s_{-2}, s_3, s_4, s_1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} LWM_w(s_{-3}, s_4, s_2, s_0) &= \max\{\min\{s_{-2}, s_{-3}\}, \min\{s_3, s_4\}, \min\{s_4, s_2\}, \min\{s_1, s_0\}\} \\ &= s_3 \end{aligned}$$

قضیه ۱-۹ عملگر LWM بر روی نشانوندهای $a_i (i = 1, 2, ..., n)$ به صورت یکنوا صعودی است.

اثبات فرض کنید $a_j = a'_j \ (j \neq i)$ و $a_i < a'_i$ باشد، آنگاه داریم:

$$\min\{w_i, a_i\} \le \min\{w_i, a'_i\}, \ \min\{w_j, a_j\} \le \min\{w_j, a'_j\} \ \ (j \neq i)$$

بنابراین، به ازای هر j داریم:

$$\max_j \min\{w_j, a_j\} \le \max_j \min\{w_j, a'_j\}$$

به عبارتی

---

[1] Xu (2005d)
[2] Dubois and Prade (1986)

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n\} \leq LWM_w(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$$

که اثبات کامل می‌گردد.

قضیه ۲-۹ (ژو، (۲۰۰۵)[1]) بردار $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندهای زبانی با بردار وزن $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ در نظر بگیرید. اگر به ازای هر i داشته باشیم $w_i \geq a_i$، آنگاه داریم:

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n\} = \max_i\{a_i\}$$

اثبات از آنجاکه به ازای هر i داریم $w_i \geq a_i$، آنگاه مقدار $\min\{w_i, a_i\} = a_i$ می‌باشد، بنابراین:

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n\} = \max_i \min\{w_i, a_i\} = \max_i\{a_i\}$$

که اثبات کامل می‌شود.

با توجه به قضیه (۹-۲) درمی‌یابیم که عملگر بیشینه زبانی حالت خاصی از عملگر LWM است.

قضیه ۳-۹ بردار $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندهای زبانی با بردار وزن $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ در نظر بگیرید. آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} s_{-L} &\leq \min\{\min_i\{w_i\}, \min_i\{a_i\}\} \\ &\leq LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) \\ &\leq \max\{\max_i\{w_i\}, \max_i\{a_i\}\} \leq s_L \end{aligned}$$

به طور خاص اگر وجود داشته باشد یک i به طوریکه $\min\{w_i, a_i\} = s_L$، آنگاه $LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = s_L$ می‌باشد. اگر به ازای هر i داشته باشیم $\min\{w_i, a_i\} = s_{-L}$، آنگاه مقدار $LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = s_L$ می‌باشد.

اثبات

[1] Xu (2005d)

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{w_i, a_i\} \le \max_i \max\{w_i, a_i\}$$
$$= \max_i\{\max\{w_i\}, \max_i\{a_i\}\} \le \max_i\{s_L, s_L\} = s_L$$
$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{w_i, a_i\} \ge \min_i \min\{w_i, a_i\}$$
$$= \min_i\{\min\{w_i\}, \min_i\{a_i\}\} \ge \max_i\{s_{-L}, s_{-L}\} = s_{-L}$$

بنابراین:

$$s_{-L} \le \min\{\min_i\{w_i\}, \min_i\{a_i\}\} \le LWA_w(a_1, a_2, ..., a_n)$$
$$\le \max\{\max_i\{w_i\}, \max_i\{a_i\}\} \le s_L$$

به ویژه اگر وجود داشته باشد یک i به طوریکه $\min\{w_i, a_i\} = s_L$، آنگاه:

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{w_i, a_i\} = s_L$$

اگر به ازای هر i داشته باشیم $\min\{w_i, a_i\} = s_{-L}$، آنگاه داریم:

$$LWM_w(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{w_i, a_i\} = s_{-L}$$

که اثبات کامل می‌شود.

۲-۱-۹ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش $MADM$ مبتنی بر عملگر LWM را معرفی خواهیم کرد. این روش شامل گامهای ذیل است:

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، مجموعه‌های X و U را به ترتیب بعنوان مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. تصمیم‌گیرنده ترجیحات خود را به وسیله مقادیر ارزیابی زبانی r_{ij} روی هر گزینه $x_i \in X$ با در نظر گرفتن هر شاخصه بیان می‌کند و ماتریس ارزیابی $R = (r_{ij})_{n\times m}$ و $r_{ij} \in S$ را تشکیل می‌دهد. بردار وزن به صورت $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ به ازای مقادیر $w_j \in S,\ j = 1, 2, ..., m$ می‌باشد.

گام ۲) از عملگر LWM برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از ماتریس $R=(r_{ij})_{n\times m}$ استفاده نمائید و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i را بدست آورید:

$$z_i(w)=\max_j \min\{w_j, r_{ij}\},\ i=1, 2, ..., n$$

گام ۳) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی کرده و سپس بهترین گزینه را انتخاب نمائید.

۹-۲ مثال کاربردی

مثال ۹-۲ مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن شرکت ABC به دنبال انتخاب شرکای بالقوه برای همکاری در زنجیره تامین خود است. مدیریت زنجیره تأمین شرکت ABC روی روابط استراتژیک بین شرکتهای درون زنجیره تأمین خودش تمرکز دارد. شرکت مذکور می‌داند با ایجاد یک هماهنگیِ مؤثر میان اجزای زنجیره، همه شرکتهای زنجیره می‌توانند از مزایایی همچون هزینه پایین‌تر، سطوح موجودی کمتر، به اشتراک‌گذاری اطلاعات و بنابراین مزیت رقابتی بیشتری بهره‌مند شوند. عوامل زیادی ممکن است در ایجاد این هماهنگی، موثر باشند. در این میان، هشت عامل زیر دارای اهمیت بیشتری است (چن و ژوو، ۲۰۰۱)[1]) (شاخصه‌ها): (۱) u_1: زمان پاسخ و ظرفیت تامین، (۲) u_2: مهارتهای کیفی و فنی، (۳) u_3: قیمت و هزینه، (۴) u_4: سطح خدمت، (۵) u_5: چابکی در نوآوری، (۶) u_6: سطح مدیریت و فرهنگ سازمانی، (۷) u_7: لجستیک و جریان اطلاعات و (۸) u_8: محیط شرکتها. اکنون چهار شریک بالقوه $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ وجود دارند. به منظور انتخاب بهترین آنها، شرکت ABC از یک تصمیم‌گیرنده برای ارزیابی کاندیداها با در نظر گرفتن فاکتورهای هشتگانه فوق $u_j(j=1, 2, ..., 8)$ (با بردار وزن $w=(s_{-2}, s_0, s_2, s_3, s_4, s_{-1}, s_2, s_4)$) دعوت می‌کند. تصمیم‌گیرنده، شرکتهای کاندید را ارزیابی کرده و ماتریس ارزیابی $R=(r_{ij})_{8\times 8}$ را تشکیل می‌دهد (مطابق جدول (۹-۱)):

[1] Chen and Xu (2001)

جدول ۱-۹ ماتریس تصمیم R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	s_1	s_2	s_0	s_4
x_2	s_0	s_2	s_4	s_2
x_3	s_2	s_1	s_2	s_4
x_4	s_2	s_4	s_2	s_{-1}
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_3	s_{-2}	s_0
x_2	s_{-1}	s_{-2}	s_4	s_1
x_3	s_4	s_{-1}	s_2	s_5
x_4	s_1	s_4	s_4	s_2

از عملگر LWM برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی در iامین سطر از ماتریس R استفاده کرده و مقادیر کلی ارزیابی شاخصه‌های $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
z_1(w) &= \max_j \min\{w_j, r_{1j}\}\\
&= \max\{\min\{s_{-2}, s_1\}, \min\{s_0, s_2\}, \min\{s_2, s_0\}, \min\{s_3, s_4\}\}\\
&\qquad \min\{s_4, s_2\}, \min\{s_{-1}, s_3\}, \min\{s_2, s_{-2}\}, \min\{s_4, s_0\}\}\\
&= \max\{s_{-2}, s_0, s_0, s_3, s_2, s_{-1}, s_{-2}, s_0\}\\
&= s_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2(w) &= \max_j \min\{w_j, r_{2j}\}\\
&= \max\{\min\{s_{-2}, s_0\}, \min\{s_0, s_2\}, \min\{s_2, s_3\}, \min\{s_3, s_2\}\}\\
&\qquad \min\{s_4, s_{-1}\}, \min\{s_{-1}, s_{-2}\}, \min\{s_2, s_4\}, \min\{s_4, s_1\}\}\\
&= \max\{s_{-2}, s_0, s_2, s_2, s_{-1}, s_{-2}, s_2, s_1\}\\
&= s_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3(w) &= \max_j \min\{w_j, r_{3j}\}\\
&= \max\{\min\{s_{-2}, s_2\}, \min\{s_0, s_1\}, \min\{s_2, s_2\}, \min\{s_3, s_4\}\}
\end{aligned}
$$

$$\min\{s_4, s_3\}, \min\{s_{-1}, s_{-1}\}, \min\{s_2, s_2\}, \min\{s_4, s_5\}\}$$
$$= \max\{s_{-2}, s_0, s_2, s_3, s_3, s_{-1}, s_2, s_4\}$$
$$= s_4$$
$$z_4(w) = \max_j \min\{w_j, r_{4j}\}$$
$$= \max\{\min\{s_{-2}, s_2\}, \min\{s_0, s_4\}, \min\{s_2, s_1\}, \min\{s_3, s_{-1}\}\}$$
$$\min\{s_4, s_1\}, \min\{s_{-1}, s_1\}, \min\{s_2, s_4\}, \min\{s_4, s_2\}\}$$
$$= \max\{s_{-2}, s_0, s_1, s_{-1}, s_1, s_{-1}, s_2, s_2\}$$
$$= s_2$$

سپس گزینه‌های x_i را مطابق مقادیر $z_i(w)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \sim x_4$$

بنابراین، بهترین شریک بالقوه برای این شرکت، شرکت سوم است.

۹-۳ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی بر اساس عملگرهای *LWM* و *HLWA*

۹-۳-۱ عملگر *HLWA*

در بخش ۲-۷، مفهوم عملگر *LOWA* را معرفی کردیم. به عبارتی

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\}$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن متناظر با عملگر *LOWA* می‌باشد و نیز $a_i \in S$ و $\omega_j \in S$ می‌باشد. همچنین، b_j معادل j امین نشانوند بزرگ از میان نشانوندهای زبانی $(a_1, a_2, ..., a_n)$ است.

مثال ۳-۹ فرض کنید $\omega=(s_{-2}, s_{-3}, s_{-1}, s_{-4})$ است و داریم:

$$a_1=s_0,\ \ a_2=s_1,\ \ a_3=s_{-1},\ \ a_4=s_{-2}$$

آنگاه با استفاده از عملگر $LOWA$ خواهیم داشت:

$$b_1=s_1,\ \ b_2=s_0,\ \ b_3=s_{-1},\ \ b_4=s_{-2}$$

و بنابراین:

$$LOWA_\omega(s_0, s_1, s_{-1}, s_{-2})=\max\{\min\{s_{-2}, s_1\}, \min\{s_{-3}, s_0\}, \min\{s_{-1}, s_{-1}\}, \min\{s_{-4}, s_{-2}\}\}$$

در ادامه، به بررسی برخی ویژگیهای عملگر $LOWA$ خواهیم پرداخت:

قضیه ۴-۹ (جابجایی) (ژو، (۲۰۰۵)[1]) $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندهای زبانی در نظر بگیرید. آنگاه:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n)=LOWA_\omega(\dot{a}_1, \dot{a}_2, ..., \dot{a}_n)$$

که $(\dot{a}_1, \dot{a}_2, ..., \dot{a}_n)$ هر جایگشتی از $(a_1, a_2, ..., a_n)$ است.

اثبات موارد زیر را در نظر بگیرید

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n)=\max_i \min\{\omega_j, b_j\}$$
$$LOWA_\omega(\dot{a}_1, \dot{a}_2, ..., \dot{a}_n)=\max_i \min\{\omega_j, \dot{b}_j\}$$

از آنجاکه $(\dot{a}_1, \dot{a}_2, ..., \dot{a}_n)$ هر جایگشتی از $(a_1, a_2, ..., a_n)$ است، آنگاه مقدار $b_j=\dot{b}_j$ است. پس، تساوی $LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n)=LOWA_\omega(\dot{a}_1, \dot{a}_2, ..., \dot{a}_n)$ برقرار است، که اثبات کامل می‌شود.

[1] Xu (2005d)

قضیه ۵-۹ (یکنوایی) (ژو، (۲۰۰۵)) بردارهای $(a_1, a_2, ..., a_n)$ و $(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$ را به عنوان دو دسته از نشانوندهای زبانی در نظر بگیرید. اگر به ازای هر i داشته باشیم $a_i \le a_i^{'}$، آنگاه داریم:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) \le LOWA_\omega(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$$

اثبات موارد زیر را در نظر بگیرید:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\}$$

$$LOWA_\omega(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'}) = \max_j \min\{\omega_j, b_j^{'}\}$$

از آنجاکه به ازای هر i داریم $a_i \le a_i^{'}$؛ آنگاه داریم $b_j \le b_j^{'}$ و بنابراین:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) \le LOWA_\omega(a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_n^{'})$$

که اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۶-۹ (ژو، (۲۰۰۵)[1]) بردار $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندهای زبانی در نظر بگیرید و فرض کنید بردار $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ بردار وزن مربوط به عملگر *LOWA* باشد.

۱) اگر به ازای هر j داشته باشیم $\omega_j \ge b_j$، آنگاه:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i\{a_i\}$$

بنابراین، عملگر بیشینه زبانی حالت خاصی از عملگر *LOWA* است.

۲) اگر به ازای هر $j \ne n$ داشته باشیم $\omega_n \ge b_n$ و $\omega_n \le \omega_j$، آنگاه:

$$LOWA_\omega(a_1, a_2, ..., a_n) = \min_i\{a_i\}$$

---

[1] Xu (2005d)

و بنابراین، عملگر کمینه زبانی نیز حالت خاصی از عملگر $LOWA$ خواهد بود.

اثبات

۱) از آنجاکه به ازای هر j داریم $\omega_j \geq b_j$، آنگاه:

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_i \min\{\omega_j, b_j\} = \max_j\{b_j\} = \max_i\{a_i\}$$

۲) از آنجاکه به ازای هر $j \neq n$ داریم $\omega_n \geq b_n$ و $\omega_n \leq \omega_j$، آنگاه:

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \min\{\omega_n, b_n\} = b_n = \min_i\{a_i\}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۷-۹ (**کرانداری**) (ژو، (۲۰۰۵)[1]) بردار $(a_1, a_2, ..., a_n)$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندهای زبانی در نظر بگیرید. آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} s_{-L} &\leq \min\{\min_j\{\omega_n\}, \min_i\{a_i\}\} \leq LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) \\ &\leq \max\{\max_j\{\omega_j\}, \max_i\{a_i\}\} \leq s_L \end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر وجود داشته باشد یک j به طوریکه $\min\{\omega_j, b_j\} = s_L$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = s_{-L}$$

اثبات

$$\begin{aligned} LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) &= \max_j \min\{\omega_j, b_j\} \leq \max_j \max\{\omega_j, b_j\} \\ &= \max\{\max_j\{\omega_j\}, \max_j\{b_j\}\} \\ &= \max\{\max_j\{\omega_j\}, \max_i\{a_i\}\} \end{aligned}$$

---

[1] Xu (2005d)

$$\leq s_L$$

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\} \geq \max\{\min_j\{\omega_j\}, \min_j\{b_j\}\}$$
$$\geq \min\{\min_j\{\omega_j\}, \min_j\{b_j\}\}$$
$$= \min\{\min_j\{\omega_j\}, \min_i\{a_i\}\}$$
$$\geq s_{-L}$$

اگر به ازای هر j داشته باشیم $\min\{\omega_j, b_j\} = s_{-L}$، آنگاه:

$$LOWA_{\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\} = s_{-L}$$

که اثبات کامل می‌شود.

از تعاریف عملگرهای $LOWA$ و LWM پیداست که عملگر LWM تنها وزن عبارات زبانی را مشخص می‌کند، در حالیکه عملگر $LOWA$، موقعیتهای ترتیبی عبارات زبانی را به جای وزنهای خود عبارات زبانی مشخص می‌کند. بنابراین، هر دو عملگر $LOWA$ و LWM یک طرفه[1] هستند. برای غلبه بر این محدودیت، در ادامه به معرفی عملگر میانگین وزنی زبانی ترکیبی (یا عملگر $HLWA$) می‌پردازیم:

تعریف ۲-۹ (ژو، (۲۰۰۵)[2]) عملگر $HLWA$ یک نگاشت به صورت $HLWA: S^n \to S$ است که با فرض داشتن بردار وزنی برای آن همانند $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ و نیز مقدار $\omega_j \in S$ باشد، آنگاه بشکل زیر تعریف می‌شود:

$$HLWA_{w,\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\}$$

که در آن b_j معادل jامین بزرگترین دسته از نشانوندهای زبانی وزن‌دار $\bar{a}_i (\bar{a}_i = \min\{\omega_i, a_i\},\ i = 1, 2, ..., n)$ و $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن دسته نشانوندهای زبانی $(a_1, a_2, ..., a_n)$ و $w_i \in S$ است.

---

[1] One Sidedness
[2] Xu (2005d)

مثال ۴-۹ فرض کنید $a_1 = s_0$ ،$a_2 = s_1$ ،$a_3 = s_{-1}$ و $a_4 = s_{-2}$ دسته‌ای از نشانوندهای زبانی با بردار وزن $w = (s_0, s_{-2}, s_{-2}, s_{-3})$ هستند و $\omega = (s_{-2}, s_{-3}, s_{-1}, s_{-4})$ بردار وزن عملگر $HLWA$ است. آنگاه با توجه به تعریف (۹-۲) داریم:

$$\bar{a}_1 = \min\{s_0, s_0\} = s_0, \quad \bar{a}_2 = \min\{s_{-2}, s_1\} = s_{-2}$$
$$\bar{a}_3 = \min\{s_{-1}, s_{-1}\} = s_{-1}, \quad \bar{a}_4 = \min\{s_{-2}, s_{-3}\} = s_{-3}$$

از این رو

$$b_1 = s_0, \quad b_2 = s_{-1}, \quad b_3 = s_{-2}, \quad b_4 = s_{-3}$$

در نتیجه

$$HLWA_{w,\omega}(s_0, s_1, s_{-1}, s_{-2}) = \max\{\min\{s_{-2}, s_0\}, \min\{s_{-3}, s_{-1}\}, \min\{s_{-1}, s_{-2}\}, \min\{s_{-4}, s_{-3}\}\} = s_{-2}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۸-۹ (ژو، (۲۰۰۵)[1]) عملگر LWM حالت خاصی از عملگر $HLWA$ است.

اثبات فرض کنیم مقدار $\omega = (s_L, s_L, ..., s_L)$ است. آنگاه داریم:

$$HLWA_{w,\omega}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max_j \min\{\omega_j, b_j\} = \max_j\{b_j\} = \max_i\{\bar{a}_i\} = \max_i \min\{w_i, a_i\}$$

که اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۹-۹ (ژو، (۲۰۰۵)) عملگر $LOWA$ یک حالت خاص از عملگر $HLWA$ است.

---

[1] Xu (2005d)

از قضایای (۹-۸) و (۹-۹) می‌دانیم که عملگر $HLWA$ هر دو عملگر $LOWA$ و LWM را در بر می‌گیرد. این عملگر نه‌تنها درجات اهمیت خود عبارات زبانی را در نظر می‌گیرد، بلکه درجات اهمیت موقعیتهای ترتیبی این عبارات زبانی را نیز در نظر می‌گیرد.

۹-۳-۲ روش تصمیم‌گیری

اکنون به معرفی یک روش برای حل مسائل $MAGDM$ بر اساس عملگرهای LWM و $HLWA$ می‌پردازیم (ژو، (۲۰۰۵)[1]):

گام ۱) در یک مسئله $MAGDM$ مجموعه‌های X، U و D را به ترتیب مجموعه گزینه‌ها، شاخصه‌ها و تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. همچنین، $w=(w_1, w_2, ..., w_n)$ را بردار وزن شاخصه‌ها و $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ را بردار وزن تصمیم‌گیرندگان $d_k\,(k=1, 2, ..., t)$ در نظر بگیرید به طوریکه $w_j, \lambda_k \in S$ باشد. فرض کنید تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ اطلاعات ارزیابی زبانی (مقادیر شاخصه‌ها) $r_{ij}^{(k)}$ را برای هر گزینه $x_i \in X$ با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_k \in U$ فراهم می‌کند و ماتریس تصمیم $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را که در آن $r_{ij}^{(k)} \in S$ است، تشکیل می‌دهد.

گام ۲) مقادیر شاخصه‌ها برای i امین سطر از $R_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را با استفاده از عملگر LWM تلفیق کرده و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ برای هر گزینه x_k را بدست آورید:

$$\begin{aligned} z_i^{(k)}(w) &= LWM_w(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, ..., r_{im}^{(k)}) \\ &= \max_j \min\{w_j, r_{ij}^{(k)}\},\ i=1, 2, ..., n,\ k=1, 2, ..., t \end{aligned}$$

گام ۳) از عملگر $HLWA$ برای بدست آوردن مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1, 2, ..., t)$ استفاده کنید و مقدار شاخصه کلی گروهی $z_i(w)$ برای هر گزینه x_i را بدست آورید:

---

[1] Xu (2005d)

$$z_i(\lambda, \omega) = HLWA_{\lambda,\omega}(z_i^{(1)}(w), z_i^{(2)}(w), ..., z_i^{(t)}(w))$$
$$= \max_k \min\{\omega_k, b_i^{(k)}\}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزن عملگر $HWLA$ است و نیز $\omega_k \in S$ می‌باشد و $b_i^{(k)}$ معادل k امین بزرگترین دسته از نشانوندهای زبانی وزن‌دار $(a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, ..., a_i^{(t)})$ است که:

$$a_i^{(l)} = \min\{\lambda_l, z_i^{(l)}(w)\}, l = 1, 2, ..., t$$

گام ۴) گزینه‌های x_i را بر اساس مقادیر $z_i(\lambda, \omega)$ رتبه‌بندی نمائید.

۴-۹ مثال کاربردی

مثال ۵-۹ در فرآیند ارزیابی کیفیت فعالیت معلمان یک مدرسه راهنمایی، هشت شاخصه وجود دارند: (۱) u_1: کیفیت علم و فرهنگ، (۲) u_2: ایدئولوژی و کیفیت اخلاق، (۳) u_3: کیفیت جسمانی و ذهنی، (۴) u_4: قدرت هدایت یادگیری و تدریس، (۵) u_5: توانایی پژوهش علمی، (۶) u_6: توانایی درک ذهنیت دانش‌آموزان، (۷) u_7: توانایی مدیریت تدریس و (۸) u_8: قابلیت مطالعه مستقل شخصی. بردار وزن شاخصه‌ها به صورت $w = (s_1, s_0, s_4, s_3, s_3, s_0, s_2, s_1)$ است که $s_i \in S$ است و S به صورت زیر می‌باشد:

S={بسیارضعیف، خیلی‌ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف، متوسط،
نسبتاً خوب، خوب، خیلی خوب، بسیارخوب}

سه تصمیم‌گیرنده $d_k(k = 1, 2, 3)$ با بردار وزنی $\lambda = (s_0, s_4, s_2)$، از عبارات زبانی مجموعه S برای ارزیابی چهار معلم $x_i(i = 1, 2, 3, 4)$ با توجه به هشت شاخصه مطرح شده $u_j(j = 1, 2, ..., 8)$ استفاده می‌کنند. مقادیر ارزیابی در جداول (۹-۲)، (۹-۳) و(۹-۴) قابل مشاهده است:

جدول ۲-۹ ماتریس تصمیم R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_4	s_1	s_2	s_3	s_4	s_2
x_2	s_4	s_3	s_1	s_2	s_4	s_3	s_2	s_3
x_3	s_3	s_2	s_4	s_1	s_4	s_4	s_3	s_4
x_4	s_2	s_3	s_0	s_1	s_4	s_1	s_3	s_3

جدول ۳-۹ ماتریس تصمیم R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_0	s_3	s_3	s_0	s_2	s_4	s_1	s_2
x_2	s_2	s_1	s_0	s_0	s_4	s_3	s_4	s_0
x_3	s_0	s_1	s_4	s_3	s_4	s_3	s_4	s_2
x_4	s_1	s_1	s_1	s_1	s_2	s_3	s_1	s_0

جدول ٤-۹ ماتریس تصمیم R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_1	s_3	s_3	s_1	s_4	s_3	s_1	s_2
x_2	s_2	s_1	s_1	s_2	s_2	s_0	s_4	s_3
x_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3	s_3	s_4
x_4	s_1	s_1	s_0	s_0	s_1	s_3	s_1	s_4

در ادامه، مسئله فوق را با روش ارائه شده در بخش (۹-۴) حل خواهیم کرد:

گام ۱) مقادیر شاخصه‌ها در i امین سطر از ماتریسهای تصمیم R_k را به وسیله عملگر LWM تلفیق کرده و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(w) &= LWM_w(r_{11}^{(1)}, r_{12}^{(1)}, ..., r_{18}^{(1)}) \\ &= \max\{\min\{s_1, s_2\}, \min\{s_0, s_4\}, \min\{s_4, s_4\}, \min\{s_3, s_1\}, \min\{s_3, s_2\}, \\ &\qquad \min\{s_0, s_3\}, \min\{s_2, s_4\}, \min\{s_1, s_2\}\} \end{aligned}$$

$$= \max\{s_1, s_0, s_4, s_1, s_2, s_0, s_2, s_1, s_2\}$$
$$= s_4$$

به طور مشابه داریم:

$$z_2^{(1)}(w) = LWM_w(r_{21}^{(1)}, r_{22}^{(1)}, ..., r_{28}^{(1)}) = s_3,\ z_3^{(1)}(w) = LWM_w(r_{31}^{(1)}, r_{32}^{(1)}, ..., r_{38}^{(1)}) = s_4$$

$$z_4^{(1)}(w) = LWM_w(r_{41}^{(1)}, r_{42}^{(1)}, ..., r_{48}^{(1)}) = s_3,\ z_1^{(2)}(w) = LWM_w(r_{11}^{(2)}, r_{12}^{(2)}, ..., r_{18}^{(2)}) = s_3$$

$$z_2^{(2)}(w) = LWM_w(r_{21}^{(2)}, r_{22}^{(2)}, ..., r_{28}^{(2)}) = s_4,\ z_3^{(2)}(w) = LWM_w(r_{31}^{(2)}, r_{32}^{(2)}, ..., r_{38}^{(2)}) = s_4$$

$$z_4^{(2)}(w) = LWM_w(r_{41}^{(2)}, r_{42}^{(2)}, ..., r_{48}^{(2)}) = s_2,\ z_1^{(3)}(w) = LWM_w(r_{11}^{(3)}, r_{12}^{(3)}, ..., r_{18}^{(3)}) = s_3$$

$$z_2^{(3)}(w) = LWM_w(r_{21}^{(3)}, r_{22}^{(3)}, ..., r_{28}^{(3)}) = s_2,\ z_3^{(3)}(w) = LWM_w(r_{31}^{(3)}, r_{32}^{(3)}, ..., r_{38}^{(3)}) = s_3$$

$$z_4^{(3)}(w) = LWM_w(r_{41}^{(3)}, r_{42}^{(3)}, ..., r_{48}^{(3)}) = s_1$$

گام ۲) فرض کنید $\omega = (s_4, s_2, s_1)$ باشد آنگاه از عملگر $HLWA$ به منظور تلفیق مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(w)$ به ازای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k = 1, 2, 3)$ استفاده می‌کنیم و مقادیر کلی شاخصه‌های گروهی $z_i(\lambda, \omega)$ را برای گزینه x_i بدست می‌آوریم:

$$z_1(\lambda, \omega) = HLWA_{\lambda,\omega}(z_1^1(w), z_1^2(w), z_1^3(w)) = s_3$$

$$z_2(\lambda, \omega) = HLWA_{\lambda,\omega}(z_2^1(w), z_2^2(w), z_2^3(w)) = s_4$$

$$z_3(\lambda, \omega) = HLWA_{\lambda,\omega}(z_3^1(w), z_3^2(w), z_3^3(w)) = s_4$$

$$z_4(\lambda, \omega) = HLWA_{\lambda,\omega}(z_4^1(w), z_4^2(w), z_4^3(w)) = s_2$$

گام ۳) معلمان تحت بررسی در مسئله x_i را بر اساس مقادیر $z_i(\lambda, \omega)$ به شکل زیر رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_2 \sim x_3 \succ x_1 \succ x_4$$

بنابراین، گزینه‌های دوم و سوم، بهترین گزینه‌ها هستند.

بخش چهارم

روشها و کاربردهای تصمیم‌گیری چندشاخصه زبانی غیرقطعی

فصل دهم

حل مسائل *MADM* زبانی غیرقطعی با اطلاعات نامعلوم اوزان

تصمیم‌گیرندگان به دلیل پیچیدگی شرایط، عدم قطعیت پدیده‌ها و فازی بودن تفکر انسان، گاه تمایل دارند اطلاعات ارزیابیِ زبانی را به صورت غیرقطعی بیان نماید. این امر ممکن است به دلیل فشار زمان، کمبود دانش، کم‌دقتی و یا ظرفیتهای محدود پردازش اطلاعات تصمیم‌گیرنده صورت گیرد. بنابراین، ضروری است تا مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه زبانی غیرقطعی که اخیرا توجه بسیاری را جلب کرده، مورد مطالعه و بررسی بیشتری قرار گیرند. در این فصل، ابتدا به معرفی قوانین عملیاتی متغیرهای زبانی غیرقطعی[1] پرداخته و سپس روشهای تلفیق عبارات زبانی غیرقطعی همانند: عملگر میانگین وزنی ترتیبی توسعه‌یافته غیرقطعی[2] (*UEOWA*)، عملگر میانگین وزنی توسعه‌یافته غیرقطعی[3] (*UEWA*) و عملگر تلفیق ترکیبی زبانی غیرقطعی[4] (*ULHA*) و امثال آن معرفی خواهند شد. همچنین، به معرفی روش حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *UEOWA* و روش حل مسائل *MAGDM* بر اساس عملگر *ULHA* خواهیم پرداخت و کاربرد آنها را در مسائلی مانند انتخاب شریک تجاری در زمینه مدیریت زنجیره تأمین مورد بررسی قرار خواهیم داد.

---

[1] Uncertain Linguistic Variables
[2] Uncertain Extended Ordered Weighted Averaging (UEOWA) Operator
[3] Uncertain Extended Weighted Averaging (UEWA) Operator
[4] Uncertain Linguistic Hybrid Aggregation (ULHA) Operator

۱-۱۰ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر UEOWA

۱-۱-۱۰ عملگر میانگین وزنی ترتیبی توسعه‌یافته غیرقطعی (UEOWA)

تعریف ۱-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۴)[1]) فرض کنید یک متغیر زبانی بصورت $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]$ داشته باشیم که در آن $s_a, s_b \in \bar{S}$ بوده و نیز s_a و s_b به ترتیب حدود پایین و بالا می باشند. در این شرایط $\tilde{\mu}$ متغیر زبانی غیرقطعی نامیده می‌شود.

فرض کنید $\tilde{S}$ به عنوان مجموعه‌ای از متغیرهای زبانی غیرقطعی باشد. دو متغیر زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]$ و $\tilde{v}=[s_c, s_d]\in \tilde{S}$ را در نظر بگیرید که $\beta, \beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$ هستند. حال قوانین عملیاتی آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (ژوو، (۲۰۰۴) ، (۲۰۰۶)[2]):

1) $\tilde{\mu}\oplus \tilde{v}=[s_a, s_b]\oplus[s_c, s_d]=[s_a \oplus s_c, s_b \oplus s_d]=[s_{a+c}, s_{b+d}]$

2) $\beta\tilde{\mu}=\beta[s_a, s_b]=[\beta s_a, \beta s_b]=[s_{\beta a}, s_{\beta b}]$

3) $\tilde{\mu}\oplus \tilde{v}=\tilde{v}\oplus \tilde{\mu}$

4) $\beta(\tilde{\mu}\oplus \tilde{v})=\beta\tilde{\mu}\oplus \beta\tilde{v}$

5) $(\beta_1+\beta_2)\tilde{\mu}=\beta_1\tilde{\mu}\oplus \beta_2\tilde{\mu}$

تعریف ۲-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۶)) فرض کنید $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]\,, \tilde{v}=[s_c, s_d]\in \tilde{S}$ باشد. همچنین $l_{ab}=b-a$ و $l_{cd}=d-c$ باشد. آنگاه درجه امکان $\tilde{\mu}\ge \tilde{v}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(\tilde{\mu}\ge \tilde{v})=\max\left\{1-\max\left\{\frac{d-a}{l_{ab}+l_{cd}}\,,\,0\right\},\,0\right\} \qquad (۱-۱۰)$$

---

[1] Xu (2004j)
[2] Xu (2006a)

به طور مشابه، درجه امکان $\tilde{v} \geq \tilde{\mu}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(\tilde{v} \geq \tilde{\mu}) = \max\left\{1 - \max\left\{\frac{b-c}{l_{ab}+l_{cd}}\,,\,0\right\},\,0\right\}$$

با استفاده از تعریف (۱۰-۲)، نتیجه زیر قابل اثبات خواهد بود:

قضیه ۱۰-۱ (ژوو، (۲۰۰۶)[1]) مقادیر $\tilde{\mu}=[s_a,\, s_b],\, \tilde{v}=[s_c,\, s_d],\, \tilde{\gamma}=[s_e,\, s_f] \in \tilde{S}$ را در نظر بگیرید. آنگاه خواهیم داشت:

۱) $0 \leq p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) \leq 1$ و $0 \leq p(\tilde{v} \geq \tilde{\mu}) \leq 1$.

۲) $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) = 1$ است، اگر و تنها اگر $d \leq a$ باشد. به طور مشابه، $p(\tilde{v} \geq \tilde{\mu}) = 1$ ، اگر و تنها اگر $b \leq c$ باشد.

۳) $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) = 0$ است، اگر و تنها اگر $b \leq c$ باشد. به طور مشابه، $p(\tilde{v} \geq \tilde{\mu}) = 0$ است اگر و تنها اگر $d \leq a$ باشد.

۴) $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) + p(\tilde{v} \geq \tilde{\mu}) = 1$ برقرار بوده و به صورت خاص مقدار $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) = \frac{1}{2}$ است.

۵) $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) \geq \frac{1}{2}$ است، اگر و تنها اگر $a+b \geq c+d$ باشد. به خصوص $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) = \frac{1}{2}$ است، اگر و تنها اگر $a+b = c+d$ باشد.

۶) $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{v}) \geq \frac{1}{2}$ و $p(\tilde{v} \geq \tilde{\gamma}) \geq \frac{1}{2}$ است، آنگاه $p(\tilde{\mu} \geq \tilde{\gamma}) \geq \frac{1}{2}$ است.

---

[1] Xu (2006a)

تعریف ۳-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۶)) گیریم که $UEA:\tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ است. حال اگر داشته باشیم:

$$UEA(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ ...,\ \tilde{\mu}_n) = \frac{1}{n}\,(\tilde{\mu}_1 \oplus \tilde{\mu}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{\mu}_n) \qquad (۱۰-۲)$$

آنگاه تابع UEA یک عملگر میانگین توسعه‌یافته غیرقطعی (عملگر UEA) یا عملگر EA غیرقطعی نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱۰ یک دسته متغیر زبانی غیرقطعی به صورت زیر داده شده است:

$$\tilde{\mu}_1 = [s_2,\ s_4],\ \ \tilde{\mu}_2 = [s_3,\ s_4],\ \ \tilde{\mu}_3 = [s_1,\ s_3],\ \ \tilde{\mu}_4 = [s_2,\ s_3]$$

آنگاه در اینصورت خواهیم داشت:

$$UEA(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ ...,\ \tilde{\mu}_n) = \frac{1}{4}\,([s_2,\ s_4] \oplus [s_3,\ s_4] \oplus [s_1,\ s_3] \oplus [s_2,\ s_3]) = [s_2,\ s_{3.5}]$$

تعریف ۴-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۶)[1]) فرض کنید $UEOWA:\tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ باشد. حال اگر داشته باشیم:

$$UEOWA_{\omega}(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ ...,\ \tilde{\mu}_n) = \omega_1 \tilde{v}_1 \oplus \omega_2 \tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n \tilde{v}_n \qquad (۱۰-۳)$$

که $\omega = (\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n)$ بردار وزن مربوط به عملگر $UEOWA$ است و در آن $\omega_j \in [0, 1]$، $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ و $\tilde{\mu}_i \in \tilde{S}$ و نیز $\tilde{v}_j$ معادل j امین متغیر بزرگ در دسته متغیرهای زبانی غیرقطعی $(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ ...,\ \tilde{\mu}_n)$ باشد، آنگاه تحت این شرایط، تابع $UEOWA$، یک عملگر $EOWA$ غیرقطعی (یا

[1] Xu (2006a)

عملگر *UEOWA*) نامیده می‌شود. در حالت خاص، اگر $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n} \right)$ باشد، آنگاه عملگر *UEOWA* به عملگر *UEA* تقلیل می‌یابد.

عملگر *UEOWA* عموماً با روند زیر پیاده‌سازی می‌شود:

گام ۱) بردار وزن $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ را با استفاده از معادلات (۵-۱۳) و (۵-۱۴) یا با استفاده از روش معرفی شده در بخش (۱-۱) برای عملگر میانگین وزنی ترتیبی غیرقطعی (یا عملگر *UOWA*) تعیین کنید.

گام ۲) از معادله (۱۰-۱) برای مقایسه زوجی دسته متغیرهای زبانی غیرقطعی $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n)$ استفاده کرده و ماتریس درجه امکان (رابطه ترجیحی فازی) $P = (p_{ij})_{n \times n}$ را تشکیل دهید که در آن $p_{ij} = p(\tilde{\mu}_i \geq \tilde{\mu}_j)$ است. سپس، با استفاده از معادله (۴-۶)، بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P را بدست آورده و بر اساس آن متغیرهای زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}_i (i = 1, 2, ..., n)$ را به صورت نزولی رتبه‌بندی نموده و $\tilde{v}_j (j = 1, 2, ..., n)$ را بدست آورید.

گام ۳) مقادیر $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ و $\tilde{v}_j (j = 1, 2, ..., n)$ را با استفاده از رابطه زیر تلفیق نمائید:

$$UEOWA_{\omega}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n) = \omega_1 \tilde{v}_1 \oplus \omega_2 \tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n \tilde{v}_n$$

مثال ۲-۱۰ فرض کنید $\omega = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$ باشد و یک دسته از متغیرهای زبانی غیرقطعی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{\mu}_1 = [s_2, s_4], \quad \tilde{\mu}_2 = [s_3, s_4], \quad \tilde{\mu}_3 = [s_1, s_3], \quad \tilde{\mu}_4 = [s_2, s_3]$$

آنگاه از معادله (۱۰-۱) برای مقایسه زوجی $\tilde{\mu}_i (i = 1, 2, 3, 4)$ استفاده کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.750 & 0.667 \\ 0.667 & 0.50 & 1 & 1 \\ 0.250 & 0 & 0.5 & 0.333 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & 0.5 \end{pmatrix}$$

که بردار اولویت آن با استفاده از معادله (۴-۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$v=(0.271,\ 0.347,\ 0.174,\ 0.208)$$

بر اساس این بردار اولویت متغیرهای زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}_i (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\tilde{v}_1=[s_3,\ s_4],\ \ \tilde{v}_2=[s_2,\ s_4],\ \ \tilde{v}_3=[s_2,\ s_3],\ \ \tilde{v}_4=[s_1,\ s_3]$$

از آنجاکه $\omega=(0.3,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.1)$ است، آنگاه $\tilde{\mu}_i (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ ها را با استفاده از عملگر *UEOWA* تلفیق می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &UEOWA_\omega(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ ...,\ \tilde{\mu}_4) \\ &\qquad =0.3\times[s_3,\ s_4]\oplus 0.2\times[s_2,\ s_4]\oplus 0.4\times[s_2,\ s_3]\oplus 0.1\times[s_1,\ s_3] \\ &\qquad =[s_{0.9},\ s_{1.2}]\oplus[s_{0.4},\ s_{0.8}]\oplus[s_{0.8},\ s_{1.2}]\oplus[s_{0.1},\ s_{0.3}] \\ &\qquad =[s_{2.2},\ s_{3.5}] \end{aligned}$$

۲-۱-۱۰ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *UEOWA* معرفی می‌کنیم که دارای گامهای زیر است (ژوو، (۲۰۰۶)[1]):

---

[1] Xu (2006a)

گام ۱) در یک مسئله تصمیم‌گیری چندشاخصه، مقادیر X و U را به ترتیب بعنوان مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. تصمیم‌گیرنده مقادیر ارزیابی زبانی $\tilde{r}_{ij}$ برای گزینه‌های $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j \in U$ فراهم کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی[1] $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij} \in \tilde{S}$ است.

گام ۲) از عملگر $UEOWA$ برای تلفیق اطلاعات ارزیابی در i امین سطر از $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n \times m}$ استفاده کرده و مقدار کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\omega)$ برای هر گزینه x_i را بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\omega) = UEOWA_{\omega}(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, ..., \tilde{r}_{in})$$

گام ۳) درجات امکان را محاسبه نمائید:

$$p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\omega) \geq \tilde{z}_j(\omega)), \quad i, \ j = 1, 2, ..., n$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\omega)$، ماتریس درجات امکان $P = (p_{ij})_{n \times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٤) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P استفاده نموده و گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ را رتبه‌بندی و انتخاب نمائید.

۱۰-۱-۳ مثال کاربردی

مثال ۳-۱۰ در این بخش، از مثال مطرح در بخش (۹-۲) به منظور تشریح روشی که در بالا به معرفی آن پرداختیم استفاده می‌کنیم. فرض کنید تصمیم‌گیرنده چهار شریک بالقوه $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ را با در نظر گرفتن شاخصه‌های $u_j (j = 1, 2, ..., 8)$ ارزیابی کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{8 \times 8}$، یعنی جدول (۱۰-۱)، را با استفاده از مجموعه عبارات زبانی زیر تشکیل می‌دهد:

---

[1] Uncertain Linguistic Decision Matrix

$S=\{s_i \mid i=-5, \ldots, 5\}=$ {نسبتاً ضعیف، ضعیف، کمی ضعیف، خیلی ضعیف، شدیداً ضعیف
قویاً خوب، خیلی خوب، کمی خوب، خوب، نسبتاً خوب، متوسط،}

جدول ۱-۱۰ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_{-2}, s_{-1}]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$

در ادامه از روش معرفی شده در بخش (۱۰-۱-۲) استفاده کرده تا چگونکی بکارگیری آنرا برای حل مسائل نشان دهیم:

گام ۱) متغیرهای زبانی غیرقطعی در i امین سطر از ماتریس تصمیم $\tilde{R}$ را به صورت زوجی و با استفاده از معادله (۱۰-۱) مقایسه کرده و چهار ماتریس درجه امکان $P^{(l)}=(p_{ij}^{(l)})_{8\times 8}(l=1, 2, 3, 4)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.333 & 0 & 1 & 0.667 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.667 & 0.750 & 0.333 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.333 \\ 1 & 0.333 & 1 & 0.5 & 0.667 & 0 & 1 & 1 \\ 0.667 & 0.250 & 1 & 0.333 & 0.5 & 0 & 1 & 0.750 \\ 1 & 0.667 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & 0 & 0.250 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.667 & 0 & 0.250 & 1 & 1 & 0 & 0.333 \\ 0.333 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.667 & 1 \\ 0.750 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.250 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.333 & 0.750 & 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 0.667 & 1 & 0 & 0.333 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.333 & 0 & 0 & 1 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0.5 & 0 & 0.333 & 1 & 0.750 & 0.250 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.667 \\ 1 & 1 & 0.667 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.333 & 0.667 & 0.250 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.750 & 0.333 & 0.667 & 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.333 & 1 & 0.667 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.667 & 0 & 0.5 & 1 & 0.750 & 0 & 0.250 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0.250 & 0.750 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.667 & 1 \\ 1 & 0 & 0.750 & 1 & 1 & 0.333 & 0.5 & 0.667 \\ 1 & 0 & 0.667 & 1 & 1 & 0 & 0.333 & 0.5 \end{pmatrix}$$

بر اساس معادله (۴-۶)، بردارهای اولویت ماتریسهای درجه امکان $P^{(l)}(l=1, 2, 3, 4)$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$v^{(1)}=(0.1161, 0.1652, 0.0863, 0.1518, 0.1339, 0.1816, 0.0625, 0.1027)$$
$$v^{(2)}=(0.1205, 0.1042, 0.1816, 0.1458, 0.0804, 0.0625, 0.1711, 0.1339)$$
$$v^{(3)}=(0.1161, 0.0863, 0.1339, 0.1816, 0.1518, 0.0625, 0.1027, 0.1652)$$
$$v^{(4)}=(0.0982, 0.1875, 0.1161, 0.0670, 0.0863, 0.1637, 0.1473, 0.1339)$$

بر اساس این مقادیر، سپس نشانوندها یا آرگومانهای زبانی غیرقطعی $\tilde{r}_{ij}(j=1, 2, ..., 8)$ در i امین سطر از $\tilde{R}$ را به صورت نزولی مرتب کرده، و نهایتاً از عملگر $UROWA$ برای تلفیق مقادیر نشانوندهای زبانی غیرقطعی استفاده می‌کنیم (فرض کنید که بردار وزن این عملگر به صورت $\omega=(0.15, 0.10, 0.12, 0.10, 0.12, 0.13, 0.15, 0.13)$ باشد). به عبارتی:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(\omega) &= UEOWA_{\omega}(\tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, ..., \tilde{r}_{18}) \\ &= 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_3] \\ &\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_0] \\ &= [s_{0.85}, s_{2.31}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2(\omega) &= UEOWA_{\omega}(\tilde{r}_{21}, \tilde{r}_{22}, ..., \tilde{r}_{28}) \\ &= 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_2] \\ &\quad \oplus 0.12\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_1]\oplus 0.15\times[s_{-1}, s_0]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_{-1}] \\ &= [s_{0.46}, s_{1.80}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3(\omega) &= UEOWA_{\omega}(\tilde{r}_{31}, \tilde{r}_{32}, ..., \tilde{r}_{38}) \\ &= 0.15\times[s_4, s_5]\oplus 0.10\times[s_3, s_5]\oplus 0.12\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4] \\ &\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_3]\oplus 0.15\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1] \\ &= [s_{1.85}, s_{3.31}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_4(\omega) &= UEOWA_{\omega}(\tilde{r}_{41}, \tilde{r}_{42}, ..., \tilde{r}_{48}) \\ &= 0.15\times[s_4, s_5]\oplus 0.10\times[s_3, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_3] \\ &\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1] \\ &= [s_{1.46}, s_{2.98}]\end{aligned}$$

گام ۲) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\omega) \geq \tilde{z}_i(\omega))$ را با استفاده از معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\omega)$ محاسبه کرده و ماتریس درجات امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6607 & 0.1575 & 0.2852 \\ 0.3393 & 0.5 & 0 & 0.1189 \\ 0.8425 & 1 & 0.5 & 0.6208 \\ 0.7148 & 0.8811 & 0.3792 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۳) بردار اولویت ماتریس درجه امکان P را با استفاده از معادله (۴-۶) بدست می‌آوریم:

$$v = (0.2169, 0.1632, 0.3303, 0.2896)$$

بر اساس این بردار اولویت، شرکای بالقوه x_i برای شرکت مورد نظر رتبه‌بندی می‌شوند:

$$x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2$$

بنابراین، x_3 بهترین شریک بالقوه است.

۱۰-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر عملگرهای *UEOWA* و *ULHA*

۱۰-۲-۱ عملگر میانگین وزنی توسعه‌یافته غیرقطعی (*UEWA*)

تعریف ۱۰-۵ (ژوو، (۲۰۰۶)[1]) گیریم که $UEWA: \tilde{S}^n \to \tilde{S}$ است، حال اگر داشته باشیم:

$$UEWA_w(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n) = w_1\tilde{\mu}_1 \oplus w_2\tilde{\mu}_2 \oplus \cdots \oplus w_n\tilde{\mu}_n$$

که $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ بردار وزن متغیرهای زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}_i (i = 1, 2, ..., n)$ است و در آن $w_j \in [0, 1]$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ است. آنگاه با این شرایط، تابع *UEWA* را عملگر *EWA* غیرقطعی (یا *UEWA*) می‌نامند.

در حالت خاص، اگر $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ باشد، عملگر *UEWA* به عملگر *UEA* تقلیل می‌یابد.

مثال ۱۰-٤ فرض کنید $w = (0.1, 0.3, 0.2, 0.4)$ است و یک دسته از متغیرهای زبانی غیرقطعی را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{\mu}_1 = [s_3, s_5],\ \ \tilde{\mu}_2 = [s_1, s_2],\ \ \tilde{\mu}_3 = [s_3, s_4],\ \ \tilde{\mu}_4 = [s_0, s_2]$$

حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} UEWA_w(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4) &= 0.1 \times [s_3, s_5] \oplus 0.3 \times [s_1, s_2] \oplus 0.2 \times [s_3, s_4] \oplus 0.4 \times [s_0, s_2] \\ &= [s_{0.3}, s_{0.5}] \oplus [s_{0.3}, s_{0.6}] \oplus [s_{0.6}, s_{0.8}] \oplus [s_0, s_{0.8}] \\ &= [s_{1.2}, s_{2.7}] \end{aligned}$$

---

[1] Xu (2006a)

از تعاریف (۱۰-۴) و (۱۰-۵) می‌توان دید که عملگر *UEOWA* یک محدودیت دارد و آن اینکه تنها موقعیتهای ترتیبی عبارات زبانی را وزن‌دهی می‌کند، در همین حال، عملگر *UEWA* محدودیت دیگری دارد و آن اینکه فقط عبارات زبانی را وزن‌دهی می‌کند. بنابراین، هر دو عملگر *UEOWA* و *UEWA* تنها روی یک جنبه کار می‌کنند. در ادامه، برای حل این محدودیت، به معرفی یک عملگر تلفیق ترکیبی زبانی غیرقطعی (*ULHA*) می‌پردازیم.

۱۰-۲-۲ عملگر تلفیق ترکیبی زبانی غیرقطعی (*ULHA*)

تعریف ۱۰-٦ (ژوو، (۲۰۰۶)[1]) گیریم که $ULHA: \tilde{S} \to \tilde{S}$ است، حال اگر داشته باشیم:

$$ULHA_{w,\omega}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n) = \omega_1 \tilde{v}_1 \oplus \omega_2 \tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n \tilde{v}_n$$

که $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ عبارتست از بردار وزن (بردار موقعیت) عملگر *ULHA* و در آن $\omega_j \in [0, 1]$ و $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ است، همچنین، $\tilde{v}_j$ معادل j امین عنصر بزرگ در دسته متغیرهای زبانی غیرقطعی وزن‌دار $(\tilde{\mu}_1^{'}, \tilde{\mu}_2^{'}, ..., \tilde{\mu}_n^{'})$ است و نیز $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ بردار وزن متغیرهای زبانی غیر قطعی $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, ..., \bar{\mu}_n)$, به‌ازای $\tilde{\mu}_i^{'} = nw_i \tilde{\mu}_i$ است، که در آن $w_j \in [0, 1]$، $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ و n ضریب متعادل‌ساز است. آنگاه تحت این شرایط، تابع *ULHA*، یک عملگر تلفیق ترکیبی زبانی غیرقطعی (*ULHA*) نامیده می‌شود.

مثال ۱۰-۵ مقادیر $\tilde{\mu}_1 = [s_0, s_1]$، $\tilde{\mu}_2 = [s_1, s_2]$، $\tilde{\mu}_3 = [s_{-1}, s_2]$ و $\tilde{\mu}_4 = [s_{-2}, s_0]$ را به عنوان دسته‌ای از نشانوندها یا آرگومانهای زبانی غیرقطعی در نظر بگیرید که بردار وزن آنها به صورت $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ می‌باشد. همچنین، $\omega = (0.3, 0.2, 0.3, 0.2)$ بردار وزن عملگر *ULHA* است. با استفاده از قضیه (۱۰-۶) داریم:

---

[1] Xu (2006a)

$$\tilde{\mu}_1^{'} = 4\times 0.2\times[s_0,\, s_1] = [s_0,\, s_{0.8}],\;\; \tilde{\mu}_2^{'} = 4\times 0.3\times[s_1,\, s_2] = [s_{1.2},\, s_{2.4}]$$
$$\tilde{\mu}_3^{'} = 4\times 0.1\times[s_{-1},\, s_2] = [s_{-0.4},\, s_{0.8}],\;\; \tilde{\mu}_4^{'} = 4\times 0.4\times[s_{-2},\, s_0] = [s_{-3.2},\, s_0]$$

آنگاه با استفاده از معادله (۱۰-۱) متغیرهای زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}_i^{'}(i=1, 2, 3, 4)$ را بصورت زوجی مقایسه کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.6 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0.5 & 0.909 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.5 \end{pmatrix}$$

که بردار اولویت آن را می‌توان از معادله (۴-۶) به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$v = (0.2583,\, 0.3750,\, 0.2341,\, 0.1326)$$

سپس، با استفاده $v_i(i=1, 2, 3, 4)$، متغیرهای زبانی غیرقطعی $\tilde{\mu}_i^{'}(i=1, 2, 3, 4)$ را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$\tilde{v}_1 = [s_{1.2},\, s_{2.4}],\;\; \tilde{v}_2 = [s_0,\, s_{0.8}],\;\; \tilde{v}_3 = [s_{-0.4},\, s_{0.8}],\;\; \tilde{v}_4 = [s_{-3.2},\, s_0]$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} ULHA_{w,\omega}(\tilde{\mu}_1,\, \tilde{\mu}_2,\, \tilde{\mu}_3,\, \tilde{\mu}_4) &= 0.3\times[s_{1.2},\, s_{2.4}]\oplus 0.2\times[s_0,\, s_{0.8}] \\ &\quad \oplus 0.3\times[s_{-0.4},\, s_{0.8}]\oplus 0.2\times[s_{-3.2},\, s_0] \\ &= [s_{-0.40},\, s_{1.12}] \end{aligned}$$

قضیه ۲-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۶)[1]) عملگر *UEWA* یک حالت خاص از عملگر *ULHA* است.

[1] Xu (2006a)

اثبات $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ را در نظر بگیرید؛ آنگاه

$$\begin{aligned} ULHA_{w,\omega}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n) &= \omega_1\tilde{v}_1 \oplus \omega_2\tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n\tilde{v}_n \\ &= \frac{1}{n}(\tilde{v}_1 \oplus \tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{v}_n) \\ &= w_1\tilde{\mu}_1 \oplus w_2\tilde{\mu}_2 \oplus \cdots \oplus w_2\tilde{\mu}_2 \end{aligned}$$

که اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳-۱۰ (ژوو، (۲۰۰۶)) عملگر *UEOWA* یک حالت خاص از عملگر *ULHA* است.

اثبات بردار $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right)$ را در نظر بگیرید. آنگاه $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$ $\tilde{\mu}_i^{'} = \tilde{\mu}_i,$ خواهد بود که اثبات را کامل می‌کند.

از قضایای (۱۰-۲) و (۱۰-۳) می‌توان دید که عملگر *ULHA* هر دو عملگر *UEWA* و *UEOWA* را دربر می‌گیرد، یعنی نه‌تنها درجات اهمیت عبارات زبانی را در نظر می‌گیرد، بلکه درجات اهمیت موقعیتهای آنها را نیز لحاظ می‌کند.

۳-۲-۱۰ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش برای حل مسائل *MADM* بر اساس عملگرها *UEOWA* و *ULHA* را معرفی می‌کنیم (ژوو، (۲۰۰۶)) که دارای گامهای زیر است:

گام ۱) در یک مسئله *MADM*، مجموعه‌های *X*، *U* و *D* را به ترتیب بعنوان مجموعه گزینه‌ها، شاخصه‌ها و تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. اطلاعات وزن شاخصه‌ها کاملاً نامعلوم است. بردار وزن تصمیم‌گیرندگان نیز به صورت $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است، که در آن $\lambda_k \geq 0\ \left(k = 1, 2, ..., t\right)$

و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ است. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقدار ارزیابی زبانی $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ برای گزینه $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن شاخصه $u_j \in U$ فراهم کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که $\tilde{r}_{ij}^{(k)} \in \tilde{S}$ است.

گام ۲) از عملگر $UEOWA$ به منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی در i امین سطر ماتریس $\tilde{R}_k$ استفاده کرده و مقادیر شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(\omega)$ برای گزینه x_i را متناظر با تصمیم‌گیرنده d_k بدست آورید:

$$\tilde{z}_i^{(k)}(\omega) = UEOWA_\omega(\tilde{r}_{i1}^{(k)}, \tilde{r}_{i2}^{(k)}, ..., \tilde{r}_{in}^{(k)})$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(\omega)$ برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k را با استفاده از عملگر $ULHA$ تلفیق کرده و سپس مقادیر کلی شاخصه گروهی $z_i^{(k)}(\lambda, \omega')$ را برای گزینه x_i بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\lambda, \omega') = ULHA_{\lambda,\omega'}(\tilde{r}_i^{(1)}, \tilde{r}_i^{(2)}, ..., \tilde{r}_i^{(t)}) = \omega_1'\tilde{v}_i^{(1)} \oplus \omega_2'\tilde{v}_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \omega_t'\tilde{v}_i^{(t)}$$

که $\omega' = (\omega_1', \omega_2', ..., \omega_t')$ بردار وزن مربوط به عملگر $ULHA$ است. همچنین، $\omega_k' \in [0, 1]$ و $\sum_{k=1}^{t} \omega_k' = 1$ و نیز $\tilde{v}_i^{(k)}$ معادل kامین دسته بزرگ از متغیرهای زبانی غیرقطعی وزن‌دار $(t\lambda_1\tilde{z}_i^{(1)}(\omega), t\lambda_2\tilde{z}_i^{(2)}(\omega), ..., t\lambda_t\tilde{z}_i^{(t)}(\omega))$ می‌باشد و t ضریب متعادل‌ساز است.

گام ٤) درجات امکان را محاسبه کنید:

$$p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\lambda, \omega') \geq \tilde{z}_j(\lambda, \omega')), \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱) و با مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\lambda, w')$ ها، ماتریس درجات امکان $P = (p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) از معادل (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v=(v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P استفاده کنید و در نهایت گزینه‌های x_i را رتبه‌بندی و انتخاب نمائید.

۱۰-۲-٤ مثال کاربردی

مثال ۱۰-٦ در اینجا از مثال (۱۰-۳) برای تشریح عملکرد روش ارائه شده در بخش (۱۰-۲-۳) استفاده می‌کنیم. فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده $d_k(k=1, 2, 3)$ با بردار وزن $\lambda=(0.3, 0.4, 0.3)$ در امر تصمیم‌گیری در این مسئله دخیل هستند. تصمیم‌گیرندگان مقادیر ترجیحات خود را روی چهار شریک بالقوه $x_i(i=1, 2, 3, 4)$ و نسبت به هر شاخصه $u_j(j=1, 2, ..., 8)$ بیان کرده و ماتریسهای تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k=(\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{8\times8}$ را مطابق جداول (۱۰-۲)، (۱۰-۳) و (۱۰-۴) تشکیل می‌دهند.

جدول ۱۰-۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_2]$	$[s_{-1}, s_0]$

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_{-2}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$

جدول ۳-۱۰ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_{-2}, s_1]$	$[s_{-2}, s_{-1}]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_4]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$

جدول ٤-۱۰ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_0, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_2]$	$[s_{-1}, s_0]$

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_{-3}, s_{-1}]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_5]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_3]$

گام ۱) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از $\tilde{R}_k$ را با استفاده از عملگر *UEOWA* تلفیق کرده (فرض کنید که بردار وزن عملگر *UEOWA* برابر $\omega = (0.15, 0.10, 0.12, 0.13, 0.15, 0.13$

است) و مقادیر کلی شاخصه‌های $z_i^{(k)}(\omega)$ برای هر گزینه x_i را متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k بدست می‌آوریم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(\omega) &= 0.15\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_3]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_3]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_0]\\ &= [s_{0.46}, s_{2.21}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2^{(1)}(\omega) &= 0.15\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_3]\oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_2]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_1]\oplus 0.15\times[s_{-1}, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_0]\\ &= [s_{0.55}, s_{2.08}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3^{(1)}(\omega) &= 0.15\times[s_4, s_5]\oplus 0.10\times[s_3, s_4]\oplus 0.12\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_4]\oplus 0.13\times[s_2, s_3]\oplus 0.15\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_1]\\ &= [s_{1.85}, s_{2.33}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_4^{(1)}(\omega) &= 0.15\times[s_3, s_5]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_3]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_0]\\ &= [s_{1.21}, s_{2.70}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(2)}(\omega) &= 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_1, s_4]\oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.10\times[s_1, s_2]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_3]\oplus 0.15\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1]\\ &= [s_{0.76}, s_{2.50}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2^{(2)}(\omega) &= 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_4]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1]\oplus 0.15\times[s_{-2}, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2}, s_{-1}]\\ &= [s_{0.30}, s_{2.15}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3^{(2)}(\omega) &= 0.15\times[s_3, s_5]\oplus 0.10\times[s_3, s_5]\oplus 0.12\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_3, s_4]\\ &\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_3]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1]\\ &= [s_{1.65}, s_{3.16}]\end{aligned}$$

$$\tilde{z}_4^{(2)}(\omega) = 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_2, s_3]$$
$$\oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_1, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1]$$
$$=[s_{1.21}, s_{2.71}]$$

$$\tilde{z}_1^{(3)}(\omega) = 0.15\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_4]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_2]$$
$$\oplus 0.12\times[s_0, s_3]\oplus 0.13\times[s_0, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.13\times[s_0, s_1]$$
$$=[s_{0.62}, s_{2.31}]$$

$$\tilde{z}_2^{(3)}(\omega) = 0.15\times[s_2, s_3]\oplus 0.10\times[s_1, s_3]\oplus 0.12\times[s_1, s_2]\oplus 0.10\times[s_1, s_2]$$
$$\oplus 0.12\times[s_0, s_3]\oplus 0.13\times[s_0, s_1]\oplus 0.15\times[s_{-1}, s_1]\oplus 0.13\times[s_{-3}, s_{-1}]$$
$$=[s_{0.08}, s_{1.70}]$$

$$\tilde{z}_3^{(3)}(\omega) = 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\oplus 0.12\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_1, s_4]$$
$$\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.13\times[s_0, s_3]\oplus 0.15\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_2]$$
$$=[s_{1.11}, s_{3.19}]$$

$$\tilde{z}_4^{(3)}(\omega) = 0.15\times[s_3, s_5]\oplus 0.10\times[s_2, s_5]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.10\times[s_0, s_3]$$
$$\oplus 0.12\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_0, s_2]\oplus 0.15\times[s_{-1}, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_0]$$
$$=[s_{0.49}, s_{2.71}]$$

گام ۲) مقادیر کلی شاخصه‌ها $z_i^{(k)}(\omega)$ را برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k(k=1, 2, 3)$ و با استفاده از عملگر $ULHA$ تلفیق می‌کنیم (فرض کنید بردار وزن آن به صورت $\omega' = (0.2, 0.6, 0.2)$ است). ابتدا از λ, t و $z_i^{(k)}(\omega)$ برای محاسبه $t\lambda_k z_i^{(k)}(\omega)$ استفاده می‌کنیم:

$$3\lambda_1 z_1^{(1)}(\omega) = [s_{0.414}, s_{1.989}],\ 3\lambda_1 z_2^{(1)}(\omega) = [s_{0.495}, s_{1.872}]$$
$$3\lambda_1 z_3^{(1)}(\omega) = [s_{1.665}, s_{2.097}],\ 3\lambda_1 z_4^{(1)}(\omega) = [s_{1.089}, s_{2.430}]$$
$$3\lambda_2 z_1^{(2)}(\omega) = [s_{0.912}, s_{3.000}],\ 3\lambda_2 z_4^{(2)}(\omega) = [s_{1.452}, s_{3.252}]$$
$$3\lambda_3 z_1^{(3)}(\omega) = [s_{0.558}, s_{2.079}],\ 3\lambda_3 z_2^{(3)}(\omega) = [s_{0.072}, s_{1.530}]$$
$$3\lambda_3 z_3^{(3)}(\omega) = [s_{0.999}, s_{2.871}],\ 3\lambda_3 z_4^{(3)}(\omega) = [s_{0.441}, s_{2.439}]$$

که با توجه به مقادیر فوق، مقادیر ارزیابی کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i(\lambda, \omega')$ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{z}_1(\lambda, \omega') = 0.2\times[s_{0.912}, s_{3.000}]\oplus 0.6\times[s_{0.558}, s_{2.079}]\oplus 0.2\times[s_{0.414}, s_{1.989}]$$
$$= [s_{0.600}, s_{2.245}]$$
$$\tilde{z}_2(\lambda, \omega') = 0.2\times[s_{0.360}, s_{2.580}]\oplus 0.6\times[s_{0.495}, s_{1.872}]\oplus 0.2\times[s_{0.072}, s_{1.530}]$$
$$= [s_{0.383}, s_{1.945}]$$
$$\tilde{z}_3(\lambda, \omega') = 0.2\times[s_{1.980}, s_{3.792}]\oplus 0.6\times[s_{1.665}, s_{2.097}]\oplus 0.2\times[s_{0.999}, s_{2.871}]$$
$$= [s_{1.595}, s_{2.591}]$$
$$\tilde{z}_4(\lambda, \omega') = 0.2\times[s_{1.452}, s_{3.252}]\oplus 0.6\times[s_{1.089}, s_{2.430}]\oplus 0.2\times[s_{0.441}, s_{2.439}]$$
$$= [s_{1.032}, s_{2.596}]$$

گام ۳) درجات امکان را محاسبه می‌کنیم:

$$p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\lambda, \omega') \geq \tilde{z}_j(\lambda, \omega')),\ \ i,\ j = 1, 2, 3, 4$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱) و با مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\lambda, \omega')$ ها ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5806 & 0.2461 & 0.3780 \\ 0.4194 & 0.5 & 0.1368 & 0.2921 \\ 0.3539 & 0.8632 & 0.5 & 0.6090 \\ 0.6220 & 0.7079 & 0.3910 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ٤) بردار اولویت ماتریس P را از طریق معادله (۴-۶) بدست می‌آوریم:

$$v = (0.2254, 0.1957, 0.2772, 0.2684)$$

و بر اساس این بردار اولویت، رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2$$

همانطور که پیداست، بهترین شریک بالقوه برای شرکت مورد نظر، شرکت سوم است.

فصل یازدهم

حل مسائل *MADM* زبانی غیرقطعی با اطلاعات حقیقی اوزان

در این فصل، چند روش برای حل آن دسته از مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه ارائه می‌شود که در آنها وزن شاخصه‌ها اعداد حقیقی بوده و مقادیر شاخصه‌ها در قالب متغیرهای زبانی غیرقطعی بیان می‌شود. این روشها عبارتند از: (۱) روش مبتنی بر نقطه ایده‌آل مثبت و (۲) روش مبتنی بر عملگر *UEWA* که هر دو به منظور حل مسائل *MADM* است و نیز (۳) روشی بر اساس نقطه ایده‌آل مثبت و عملگر *LHA* و (۴) روشی مبتنی بر عملگرهای *UEWA* و *ULHA* که هر دوی اینها برای حل مسائل *MAGDM* است. در ادامه به‌منظور درک بهتر این روشها، مثالهای کاربردی ارائه می‌گردد.

۱-۱۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر نقطه ایده‌آل مثبت[1]

۱-۱-۱۱ روش تصمیم‌گیری

تعریف ۱-۱۱ (ژوو، (۲۰۰۴)[2]) فرض کنید $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ یک ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی باشد، در این‌صورت $\tilde{x}^+ = (\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, ..., \tilde{r}_m^+)$ را نقطه ایده‌آل مثبت گزینه‌ها می‌نامیم، اگر روابط زیر را ارضاء کند:

$$\tilde{r}_j^+ = [r_j^{+L}, r_j^{+U}], \; r_j^{+L} = \max_i \{r_{ij}^L\}, \; r_j^{+U} = \max_i \{r_{ij}^U\}, \; (\, j = 1, 2, ..., m\,)$$

که r_j^{+L} و r_j^{+U} به ترتیب حدود بالا و پایین $\tilde{r}_j^+$ هستند.

تعریف ۲-۱۱ (ژوو، (۲۰۰۴)) مقادیر $\tilde{\mu} = [s_a, s_b]$ و $\tilde{v} = [s_c, s_d]$ را به عنوان دو متغیر زبانی غیرقطعی در نظر بگیرید که در آنها $c \geq a$ و $d \geq b$ است. آنگاه مقدار:

$$D(\tilde{\mu}, \tilde{v}) = \frac{1}{2}\,(s_{c-a} \oplus s_{d-b}) = s_{\frac{1}{2}(c-a+d-b)} \qquad (۱-۱۱)$$

را به عنوان انحراف بین $\tilde{\mu}$ و $\tilde{v}$ تعریف می‌کنیم. طبق تعریف (۲-۱۱) می‌توانیم انحراف بین گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت را به صورت زیر بیان کنیم:

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i) = w_1 D(\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_{i1}) \oplus w_2 D(\tilde{r}_2^+, \tilde{r}_{i2}) \oplus \cdots \oplus w_m D(\tilde{r}_m^+, \tilde{r}_{im}), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (۲-۱۱)$$

که در آن $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ برابر بردار وزن شاخصه‌ها و $\tilde{x}_i = (\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, ..., \tilde{r}_{im})$ بردار مقادیر شاخصه‌ها برای گزینه x_i است. بدیهی است که هر چه $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)$ کوچکتر باشد، گزینه x_i به نقطه ایده‌آل مثبت نزدیکتر بوده و در نتیجه گزینه x_i بهتر خواهد بود.

در ادامه، یک روش برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر نقطه‌آیده‌آل مثبت گزینه‌ها معرفی خواهیم کرد که دارای گامهای زیر است (ژوو، (۲۰۰۴)):

---

[1] Positive Ideal Point
[2] Xu (2004b)

گام ۱) در یک مسئله MADM، مجموعه‌های X و U را به ترتیب به عنوان مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ بردار وزن شاخصه‌های $u_j\,(j=1, 2, ..., m)$ است که در آن $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ است. تصمیم‌گیرنده مقادیر ارزیابی زبانی غیرقطعی $\tilde{r}_{ij}$ از گزینه $x_i \in X$ را با توجه به شاخصه‌های $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij} \in \tilde{S}$ است. همچنین، $\tilde{x}_i=(\tilde{r}_{i1}, \tilde{r}_{i2}, ..., \tilde{r}_{im})$ را به عنوان بردار متناظر گزینه x_i و $\tilde{x}^{+}=(\tilde{r}_1^{+}, \tilde{r}_2^{+}, ..., \tilde{r}_m^{+})$ را نقطه ایده‌آل مثبت گزینه‌ها در نظر گیرید.

گام ۲) انحراف $D(\tilde{x}^{+}, \tilde{x}_i)$ میان گزینه‌های x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^{+}$ را با استفاده از معادله (۱۱-۲) محاسبه کنید.

گام ۳) گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, ..., n)$ را رتبه‌بندی کرده و بهترین گزینه را با توجه به مقادیر $D(\tilde{x}^{+}, \tilde{x}_i)$ انتخاب کنید.

۱۱-۱-۲ مثال کاربردی

مثال ۱-۱۱ چین کشور بسیار پهناوری است که هم‌اینک توسعه اقتصادی آن بسیار نامتعادل بوده که و همین امر منجر به تفاوتهای چشمگیری میان محیطهای سرمایه‌گذاری در مناطق مختلف شده است. بنابراین، سرمایه‌گذاری خارجی در چین، اخیراً دچار مشکل انتخاب مکان مناسب برای سرمایه‌گذاری شده است. کارشناسان از ده شاخص اصلی (شاخصه‌ها) برای ارزیابی رقابتی بودن محیطهای سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنند (شنگ و همکاران، (۲۰۰۳)[1]) که عبارتند از: (۱) u_1: اندازه بازار، (۲) u_2: درجه آزادی اقتصاد، (۳) u_3: درجه بازاری شدن شرکت‌ها، (۴) u_4: درجه اعتبار منطقه‌ای، (۵) u_5: کارایی برای تصویب طرحهای سرمایه‌گذاری خارجی، (۶) u_6: شدت ترافیک، (۷) u_7: سطح ارتباطات، (۸) u_8: سطح توسعه صنعتی، (۹) u_9: سطح فنی؛ و در نهایت (۱۰) u_{10}: وضعیت منابع انسانی.

[1] Sheng et al. (2003)

بردار وزن این شاخصها به صورت $w=(0.12, 0.08, 0.10, 0.05, 0.08, 0.11, 0.15, 0.07, 0.11, 0.13)$ می‌باشد. تصمیم‌گیرنده از مجموعه عبارات زبانی زیر برای ارزیابی رقابت‌پذیری محیطهای سرمایه‌گذاری در پنج منطقه $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ با توجه به شاخصه‌های $u_j (j=1, 2, ..., 10)$ استفاده می‌کند:

$S=\{s_i \mid i=-5, ..., 5\}$

= {شدیداً ضعیف، خیلی ضعیف، کمی ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف، متوسط، نسبتاً خوب، خوب، کمی خوب، خیلی خوب، قویاً خوب}

نتایج ارزیابی در ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}$ (جدول (۱۱-۱)) نشان داده‌شده‌اند:

جدول ۱-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_5]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$
x_5	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_3]$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_5]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$
x_5	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_3]$

اکنون از روش معرفی شده در بخش (۱۱-۱-۱) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم:

گام ۱) بردار اولویت $\tilde{x}_i$ مقادیر شاخصه‌ها متناظر با هر گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^+$ گزینه‌ها را از جدول (۱۱-۱) بدست می‌آوریم:

$$\tilde{x}_1 = ([s_0, s_1], [s_2, s_5], [s_{-1}, s_1], [s_1, s_3], [s_2, s_3], [s_2, s_3], [s_{-1}, s_1], [s_1, s_2], [s_2, s_3], [s_2, s_4])$$

$$\tilde{x}_2 = ([s_1, s_2], [s_1, s_3], [s_1, s_4], [s_0, s_1], [s_1, s_3], [s_0, s_1], [s_3, s_4], [s_3, s_5], [s_1, s_4], [s_2, s_3])$$

$$\tilde{x}_3 = ([s_2, s_4], [s_0, s_2], [s_1, s_3], [s_2, s_3], [s_2, s_3], [s_0, s_2], [s_2, s_3], [s_3, s_4], [s_1, s_3], [s_2, s_4])$$

$$\tilde{x}_4 = ([s_{-2}, s_0], [s_3, s_5], [s_0, s_3], [s_0, s_2], [s_0, s_1], [s_3, s_4], [s_3, s_4], [s_2, s_4], [s_2, s_3], [s_1, s_3])$$

$$\tilde{x}_5 = ([s_{-1}, s_2], [s_1, s_4], [s_0, s_2], [s_1, s_3], [s_1, s_3], [s_2, s_4], [s_0, s_2], [s_0, s_3], [s_1, s_4], [s_0, s_1])$$

$$\tilde{x}^+ = ([s_2, s_4], [s_3, s_5], [s_1, s_4], [s_2, s_3], [s_2, s_3], [s_3, s_4], [s_3, s_4], [s_3, s_5], [s_2, s_4], [s_2, s_4])$$

جدول ۲-۱۱ عناصر انحراف $D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{ij})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j})$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j})$	$s_{1.5}$	s_2	s_0	s_2	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j})$	s_0	s_3	$s_{0.5}$	s_0	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j})$	s_4	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_2
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j})$	$s_{2.5}$	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j})$	s_1	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j})$	s_3	s_0	s_0	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j})$	$s_{2.5}$	s_1	$s_{0.5}$	s_1	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j})$	s_0	s_0	s_1	$s_{0.5}$	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j})$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$

بنابراین، عناصر انحراف (مقدار انحراف) گزینه x_i و نقطه ایده‌آل $\tilde{x}^+$ در جدول (۱۱-۲) آورده شدند:

گام ۲) انحراف بین گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^+$ را محاسبه کنید:

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1) = s_{1.480}, \; D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2) = s_{0.930}, \; D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3) = s_{0.860}$$
$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4) = s_{1.070}, \; D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5) = s_{1.620}$$

گام ۳) گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ را مطابق $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)$ به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5$$

که مشخص می‌شود گزینه سوم از سایر گزینه‌ها بهتر است.

۱۱-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر نقطه ایده‌آل و عملگر *LHA*

۱۱-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش برای حل مسائل *MAGDM* مبتنی بر نقطه ایده‌آل مثبت و عملگر *LHA* معرفی خواهیم کرد:

گام ۱) در یک مسئله *MAGDM*، مجموعه‌های X، U و D را به ترتیب بعنوان مجموعه گزینه‌ها، شاخصه‌ها و تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. بردار وزن شاخصه‌ها برابر $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$ بوده و در آن $w_j \geq 0$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ است. بردار وزن تصمیم‌گیرندگان برابر $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است که در آن $\lambda_k \geq 0$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ به ازای $(k = 1, 2, ..., t)$ است. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقدار ارزیابی زبانی $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ گزینه $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن شاخصه $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n \times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij}^{(k)} \in \tilde{S}$ و $\tilde{r}_{ij}^{(k)} = [\tilde{r}_{ij}^{L(k)}, \tilde{r}_{ij}^{U(k)}]$ می‌باشد.

همچنین، $\tilde{x}_i^{(k)}=(\tilde{r}_{ij}^{(k)}, \tilde{r}_{i2}^{(k)}, ..., \tilde{r}_{im}^{(k)})$ را بردار شاخصه برای گزینه x_i متناظر با تصمیم‌گیرنده d_k در نظر بگیرید و $\tilde{x}^+=(\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, ..., \tilde{r}_m^+)$ نیز نقطه ایده‌آل مثبت گزینه‌هاست که در آن:

$$\tilde{r}_j^+=[\tilde{r}_j^{+L}, \tilde{r}_j^{+U}],\ \tilde{r}_j^{+L}=\max_i \max_k\{\tilde{r}_{ij}^{L(k)}\}$$
$$\tilde{r}_j^{+U}=\max_i \max_k\{\tilde{r}_{ij}^{U(k)}\},\ j=1, 2, ..., n \qquad (۱۱-۳)$$

گام ۲) با استفاده از معادله (۱۱-۲)، انحراف $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(k)})$ بین گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^+$ را متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k محاسبه کنید.

گام ۳) انحرافات $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(k)})\ (k=1, 2, ..., t)$ متناظر با تصمیم‌گیرندگان $d_k\ (k=1, 2, ..., t)$ را با استفاده از عملگر *LHA* تلفیق نموده و سپس مقدار انحراف گروهی $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)$ بین گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^+$ را محاسبه نمائید:

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)=LHA_{\lambda,\omega}(D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(1)}), D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(2)}), ..., D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(t)}))$$
$$=\omega_1\tilde{v}_i^{(1)}\oplus\omega_2\tilde{v}_i^{(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_t\tilde{v}_i^{(t)}$$

که در آن $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزن عملگر *LHA* و نیز مقادیر $\omega_k\in[0,1]$ و $\sum_{k=1}^{t}\omega_k=1$ است. $\tilde{v}_i^{(k)}$ معادل kامین دسته بزرگ از متغیرهای زبانی وزن‌دار $(t\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(1)}), t\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(2)}), ..., t\lambda_t D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(t)}))$ و t ضریب متعادل‌ساز است.

گام ٤) گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, ..., n)$ را مطابق مقادیر انحراف گروهی $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)$ رتبه‌بندی و سپس بهترین گزینه را انتخاب نمائید.

۱۱-۲-۲ مثال کاربردی

مثال ۱۱-۲ اکنون به منظور درک بهتر روش ارائه شده در بخش (۱۱-۲-۱)، از مثال (۱۱-۱) استفاده می‌کنیم. فرض کنید سه ارزیاب (تصمیم‌گیرنده) ماتریسهای تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k(k=1, 2, 3)$ را مطابق با جداول (۱۱-۳)، (۱۱-۴) و (۱۱-۵) تشکیل می‌دهند:

جدول ۳-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_{-1}, s_1]$
x_5	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_2, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$

جدول ٤-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_5]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_4]$
x_3	$[s_2, s_5]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_{-2}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_{-1}, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_4]$	$[s_1, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_5]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_5	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$

جدول ۵-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_2, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_{-1}, s_1]$
x_5	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_4]$	$[s_4, s_5]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_{-1}, s_1]$

گام ۱) نقطه ایده‌آل مثبت را با استفاده از معادله (۱۱-۳) محاسبه می‌کنیم:

$$\tilde{x}^+ = ([s_3, s_5], [s_4, s_5], [s_3, s_4], [s_2, s_4], [s_2, s_4], [s_4, s_5], [s_3, s_5], [s_4, s_5], [s_3, s_4], [s_3, s_4])$$

جدول ۶-۱۱ عناصر انحراف $D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{ij}^{(1)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(1)})$	$s_{2.5}$	s_1	s_3	$s_{0.5}$	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(1)})$	s_2	s_2	$s_{0.5}$	s_2	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(1)})$	$s_{0.5}$	s_3	s_1	s_0	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(1)})$	$s_{4.5}$	s_0	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	s_3
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(1)})$	s_4	$s_{1.5}$	s_2	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(1)})$	$s_{2.5}$	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(1)})$	$s_{4.5}$	s_0	s_0	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(1)})$	s_3	s_1	$s_{0.5}$	s_2	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(1)})$	$s_{1.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(1)})$	s_2	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{3.5}$

جدول ۷-۱۱ عناصر انحراف $D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{ij}^{(2)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(2)})$	s_3	s_1	$s_{3.5}$	s_1	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(2)})$	s_2	s_3	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(2)})$	$s_{0.5}$	s_4	s_2	s_0	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(2)})$	$s_{4.5}$	s_1	s_3	$s_{2.5}$	s_2
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(2)})$	s_3	s_1	s_3	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(2)})$	s_2	s_4	s_3	s_1	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(2)})$	$s_{3.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(2)})$	s_3	s_1	$s_{0.5}$	s_2	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(2)})$	$s_{0.5}$	s_0	s_1	$s_{0.5}$	s_2
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(2)})$	s_2	$s_{2.5}$	$s_{2.5}$	$s_{1.5}$	$s_{2.5}$

گام ۲) عناصر انحراف $D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{ij}^{(k)})(i=1, 2, 3, 4, 5,\ \ j=1, 2, ..., 10)$ را محاسبه می‌کنیم، که نتایج آن در جداول (۱۱-۶)، (۱۱-۷) و (۱۱-۸) نمایش داده شده‌اند:

جدول ۸-۱۱ عناصر انحراف $D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{ij}^{(3)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(3)})$	$s_{2.5}$	s_1	s_3	$s_{0.5}$	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(3)})$	s_2	s_2	s_1	s_2	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(3)})$	$s_{0.5}$	s_3	s_1	s_0	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(3)})$	$s_{4.5}$	s_0	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	s_3
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(3)})$	s_4	$s_{1.5}$	s_2	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{1j}^{(3)})$	$s_{2.5}$	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{2j}^{(3)})$	$s_{4.5}$	s_0	s_0	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{3j}^{(3)})$	s_3	s_1	$s_{1.5}$	s_2	s_0
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{4j}^{(3)})$	$s_{1.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_1
$D(\tilde{r}_j^+, \tilde{r}_{5j}^{(3)})$	s_2	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{3.5}$

سپس انحراف بین گزینه x_i و نقطه ایده‌آل مثبت $\tilde{x}^+$ را متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k محاسبه می‌کنیم:

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1^{(1)}) = s_{1.865},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2^{(1)}) = s_{1.315},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(1)}) = s_{1.285}$$
$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(1)}) = s_{1.535},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5^{(1)}) = s_{2.295},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1^{(2)}) = s_{2.085}$$
$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2^{(2)}) = s_{1.430},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(2)}) = s_{1.445},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(2)}) = s_{1.645}$$
$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(3)}) = s_{1.285},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(3)}) = s_{1.535},\ D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5^{(3)}) = s_{2.295}$$

گام ۳) انحرافات $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(k)})(k=1, 2, 3)$ متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1, 2, 3)$ را با استفاده از عملگر LHA تلفیق می‌کنیم (فرض کنید بردار وزن به صورت $\omega=(0.3, 0.4, 0.3)$ است):
ابتدا از $\lambda,\ t$ و $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(k)})$ برای حل $t\lambda_k D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i^{(k)})(k=1, 2, 3)$ها استفاده می‌کنیم:

$$3\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1^{(1)}) = s_{1.846}\,,\ 3\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2^{(1)}) = s_{1.302}\,,\ 3\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(1)}) = s_{1.272}$$

$$3\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(1)}) = s_{1.520}\,,\ 3\lambda_1 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5^{(1)}) = s_{2.272}\,,\ 3\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1^{(2)}) = s_{2.189}$$

$$3\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2^{(2)}) = s_{1.502}\,,\ 3\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(2)}) = s_{1.517}\,,\ 3\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(2)}) = s_{1.727}$$

$$3\lambda_2 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5^{(2)}) = s_{2.168}\,,\ 3\lambda_3 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1^{(3)}) = s_{1.790}\,,\ 3\lambda_3 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2^{(3)}) = s_{1.310}$$

$$3\lambda_3 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3^{(3)}) = s_{1.234}\,,\ 3\lambda_3 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4^{(3)}) = s_{1.474}\,,\ 3\lambda_3 D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5^{(3)}) = s_{2.203}$$

سپس، انحراف $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)$ میان گزینه x_i و نقطه ایده آل مثبت $\tilde{x}^+$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_1) = 0.3\times s_{2.189} \oplus 0.4\times s_{1.846} \oplus 0.3\times s_{1.790} = s_{1.932}$$

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_2) = 0.3\times s_{1.502} \oplus 0.4\times s_{1.310} \oplus 0.3\times s_{1.302} = s_{1.365}$$

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_3) = 0.3\times s_{1.517} \oplus 0.4\times s_{1.272} \oplus 0.3\times s_{1.234} = s_{1.334}$$

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_4) = 0.3\times s_{1.727} \oplus 0.4\times s_{1.520} \oplus 0.3\times s_{1.474} = s_{1.568}$$

$$D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_5) = 0.3\times s_{2.272} \oplus 0.4\times s_{2.203} \oplus 0.3\times s_{2.168} = s_{2.213}$$

گام ٤) گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ را مطابق مقادیر $D(\tilde{x}^+, \tilde{x}_i)(i=1, 2, 3, 4)$ رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5$$

بنابراین، گزینه سوم بهترین گزینه برای سرمایه‌گذاری منطقه‌ای است.

۳-۱۱ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر $UEWA$

۱-۳-۱۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، یک روش برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر $UEWA$ معرفی خواهیم کرد:

گام ۱) در یک مسئله تصمیم‌گیری چندشاخصه، مجموعه‌های X و U را به ترتیب بعنوان مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. بردار اوزان شاخصه‌ها برابر $w=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_m)$ است، که در آن $w_j \geq 0\ (j=1,\ 2,\ ...,\ m)$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ است. تصمیم‌گیرنده مقدار ارزیابی زبانی $\tilde{r}_{ij}$ از گزینه $x_i \in X$ را با توجه به شاخصه $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس ارزیابی $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij} \in \tilde{S}$ است.

گام ۲) اطلاعات ارزیابی زبانی i امین سطر ماتریس $\tilde{R}$ را با استفاده از عملگر $UEWA$ تلفیق کرده و مقدار ارزیابی کلی $\tilde{z}_i(w)$ را برای گزینه x_i بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(w) = EWA_w(\tilde{r}_{i1},\ \tilde{r}_{i2},\ ...,\ \tilde{r}_{im}) = w_1\tilde{r}_{i1} \oplus w_2\tilde{r}_{i2} \oplus \cdots \oplus w_m\tilde{r}_{im},\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n$$

گام ۳) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w) \geq \tilde{z}_j(w))\ (i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n)$ را با استفاده از معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(w)$ ها محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٤) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v=(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n)$ برای ماتریس P استفاده کرده و گزینه‌های $x_i(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ را مطابق عناصر $v_i\ (i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ رتبه‌بندی کنید.

جدول ۹-۱۱ ماتریس تصمیم غیرقطعی $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$
x_3	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_5	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_4]$
x_4	$[s_4, s_5]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$

۲-۳-۱۱ مثال کاربردی

مثال ۳-۱۱ خدمات پس از فروش برای کالاهایی که نیازمند نگهداری و تعمیرات هستند، جزء خدمات ضروری ارائه شده توسط شرکتهای تولیدی برای مشتریانشان است. به منظور دستیابی به اهداف مدیریتی در یک شرکت تولیدی و حصول اطمینان از اینکه ارائه‌دهندگان خدمات تعمیرات بتوانند به طور کیفی وظایف خود را انجام دهند، انتخاب و ارزیابی ارائه‌کنندگان خدمات تعمیراتی مسئله‌ای است که شرکتهای تولیدی با آن مواجه می‌شوند. عوامل موثر (شاخصه‌ها) در انتخاب ارائه‌کنندگان خدمات تعمیرات به شکل زیر است: (۱) u_1: رضایت کاربر، (۲) u_2: رفتار ارائه‌دهنده خدمات تعمیر، (۳) u_3: سرعت تعمیر، (۴) u_4: کیفیت تعمیر، (۵) u_5: سطح مشاوره فنی، (۶) u_6: سطح اطلاع‌رسانی، (۷) u_7: سطح مدیریت، (۸) u_8: اخذ هزینه معقول و (۹) u_9: اندازه شرکت. فرض کنید بردار وزن عوامل (شاخصه‌ها) $u_j\,(j=1, 2, ..., 9)$ به صورت $w=(0.10, 0.08, 0.12, 0.09, 0.11, 0.13, 0.15, 0.10, 0.12)$ باشد. تصمیم‌گیرنده از مجموعه عبارت زبانی زیر برای ارزیابی پنج ارائه‌دهنده خدمات تعمیرات $x_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ با توجه به

شاخصه‌های $u_j(j=1, 2, ..., 9)$ استفاده کرده و ماتریس تصمیم R را مطابق جدول (۱۱-۹) تشکیل می‌دهد:

$S = \{s_i \mid i = -5, ..., 5\}$
= {شدیداً ضعیف، خیلی ضعیف، کمی ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف،
متوسط، نسبتاً خوب، خوب، کمی خوب، خیلی خوب، عمیقاً}

در ادامه مسئله فوق را با روش ارائه شده در بخش (۱۱-۳-۱) حل می‌کنیم:

گام ۱) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از R را با استفاده از عملگر *UEWA* تلفیق کرده و مقادیر کل ارزیابی شاخصه $\tilde{z}_i(w)$ را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
z_1(w) &= 0.10\times[s_{-1}, s_1]\oplus 0.08\times[s_3, s_4]\oplus 0.12\times[s_{-1}, s_0]\oplus 0.09\times[s_3, s_4]\\
&\quad \oplus 0.11\times[s_1, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_3]\oplus 0.15\times[s_1, s_2]\oplus 0.10\times[s_1, s_2]\\
&\quad \oplus 0.12\times[s_0, s_3] = [s_{0.78}, s_{2.36}]\\
z_2(w) &= 0.10\times[s_0, s_2]\oplus 0.08\times[s_0, s_1]\oplus 0.12\times[s_3, s_4]\oplus 0.09\times[s_1, s_3]\\
&\quad \oplus 0.11\times[s_3, s_4]\oplus 0.13\times[s_1, s_3]\oplus 0.15\times[s_3, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_4]\\
&\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_4] = [s_{1.80}, s_{3.34}]\\
z_3(w) &= 0.10\times[s_1, s_2]\oplus 0.08\times[s_0, s_3]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.09\times[s_1, s_2]\\
&\quad \oplus 0.11\times[s_0, s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1}, s_1]\oplus 0.15\times[s_1, s_3]\oplus 0.10\times[s_3, s_4]\\
&\quad \oplus 0.12\times[s_1, s_4] = [s_{0.75}, s_{2.66}]\\
z_4(w) &= 0.10\times[s_1, s_2]\oplus 0.08\times[s_3, s_5]\oplus 0.12\times[s_2, s_3]\oplus 0.09\times[s_1, s_3]\\
&\quad \oplus 0.11\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_4, s_5]\oplus 0.15\times[s_2, s_4]\oplus 0.10\times[s_2, s_3]\\
&\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_3] = [s_{2.04}, s_{2.36}]\\
z_5(w) &= 0.10\times[s_0, s_2]\oplus 0.08\times[s_2, s_3]\oplus 0.12\times[s_1, s_3]\oplus 0.09\times[s_2, s_4]\\
&\quad \oplus 0.11\times[s_1, s_2]\oplus 0.13\times[s_2, s_3]\oplus 0.15\times[s_0, s_2]\oplus 0.10\times[s_1, s_3]\\
&\quad \oplus 0.12\times[s_2, s_4] = [s_{1.17}, s_{2.96}]
\end{aligned}
$$

گام ۲) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(w) \geq \tilde{z}_j(w))\ (i,\ j=1, 2, 3, 4, 5)$ را با استفاده از معادله (۱-۱۰) محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.1795 & 0.4613 & 0.1103 & 0.3531 \\ 0.8205 & 0.5 & 0.7507 & 0.4545 & 0.6517 \\ 0.5387 & 0.2493 & 0.5 & 0.1920 & 0.4027 \\ 0.8897 & 0.5455 & 0.8080 & 0.5 & 0.7042 \\ 0.6469 & 0.3483 & 0.5973 & 0.2958 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۳) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت ماتریس درجه امکان P استفاده می‌کنیم:

$$v=(0.1552,\ 0.2339,\ 0.1691,\ 0.2474,\ 0.1944)$$

و سپس گزینه‌های $x_i\,(i=1,2,3,4,5)$ را بر اساس عناصر بردار $v_i\,(i=1,2,3,4,5)$ مرتب می‌کنیم:

$$x_4 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_1$$

که شرکت خدماتی چهارم از سایر گزینه‌ها بهتر است.

۱۱-٤ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر عملگرهای *UEWA* و *ULHA*

۱۱-٤-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه روشی برای حل مسائل *MAGDM* مبتنی بر عملگرهای *UEWA* و *ULHA* معرفی خواهیم کرد (ژوو، (۲۰۰۴)[1]):

گام ۱) در یک مسئله *MAGDM*، مقادیر X، U و D را به ترتیب مجموعه گزینه‌ها، شاخصه‌ها و تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. بردار وزن شاخصه‌های $w=(w_1, w_2, ..., w_m)$ است که در آن $w_j \geq 0\,(j=1,2,...,n)$ و $\sum_{j=1}^{m} w_j=1$ می‌باشد. همچنین، بردار وزن تصمیم‌گیرندگان

[1] Xu (2004i)

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است که در آن $\left(k = 1, 2, ..., t \right)$ $\lambda_k \ge 0$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ است. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقدار ارزیابی زبانی غیرقطعی $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ روی گزینه $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n \times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij}^{(k)} \in \tilde{S}$ است.

گام ۲) از عملگر *UEWA* به منظور تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی غیرقطعی در i امین سطر ماتریس $\tilde{R}_k$ استفاده کرده و مقدار کلی شاخصه $\tilde{z}_i^{(k)}(w)$ برای گزینه x_i متناظر با تصمیم‌گیرنده d_k بدست آورید:

$$\tilde{z}_i^{(k)}(w) = UEWA_w(\tilde{r}_{i1}^{(k)}, \tilde{r}_{i2}^{(k)}, ..., \tilde{r}_{in}^{(k)}) = w_1\tilde{r}_{i1}^{(k)} \oplus w_2\tilde{r}_{i2}^{(k)} \oplus ... \oplus w_m\tilde{r}_{im}^{(k)})$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(w)(k = 1, 2, ..., t)$ برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k(k = 1, 2, ..., t)$ را با استفاده از عملگر *ULHA* تلفیق کرده و مقدار کلی شاخصه گروهی $z_i\,(\lambda, \omega')$ را برای گزینه x_i بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\lambda, \omega') = ULHA_{\lambda,\omega'}(\tilde{z}_i^{(1)}(w), \tilde{z}_i^{(2)}(w), ..., \tilde{z}_i^{(t)}(w)) = \omega_1^{'}\tilde{v}_i^{(1)} \oplus \omega_2^{'}\tilde{v}_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \omega_t^{'}\tilde{v}_i^{(t)}$$

که در آن $\omega' = (\omega_1^{'}, \omega_2^{'}, ..., \omega_t^{'})$ بردار وزن عملگر *ULHA* است. همچنین، $\left(k = 1, 2, ..., t \right)$ $\omega_k^{'} \in [0, 1]$ و $\sum_{k=1}^{t} \omega_k^{'} = 1$ بوده و $\tilde{v}_i^{(k)}$، kامین عنصر بزرگ در دسته متغیرهای زبانی غیرقطعی $(t\lambda_1\tilde{z}_i^{(1)}(w), t\lambda_2\tilde{z}_i^{(2)}(w), ..., t\lambda_t\tilde{z}_i^{(t)}(w))$ است و t ضریب متعادل‌ساز است.

گام ٤) درجات امکان را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\lambda, \omega') \ge \tilde{z}_j(\lambda, \omega')),\ \ i,\ j = 1, 2, ..., n$$

با استفاده از معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\lambda, \omega')(i = 1, 2, ..., n)$، درجات امکان را محاسبه کرده و ماتریس درجات امکان $P = (p_{ij})_{n \times n}$ را تشکیل دهید.

گام ۵) از معادله (۴-۶) به منظور استخراج بردار اولویت $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ماتریس P استفاده کرده و سپس گزینه‌های $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ را رتبه‌بندی و انتخاب کنید.

۲-٤-۱۱ مثال کاربردی

مثال ٤-۱۱ در اینجا از مثال (۱۱-۲) برای درک بهتر روش ارائه شده در بخش (۱۱-۴-۱) استفاده می‌کنیم. فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده $d_k (k = 1, 2, 3)$ با بردار وزن $\lambda = (0.35, 0.33, 0.32)$ ماتریسهای تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k (k = 1, 2, 3)$ را مطابق جداول (۱۱-۱۰)، (۱۱-۱۱) و (۱۱-۱۲) تشکیل می‌دهند:

جدول ۱۰-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_5]$

جدول ۱۱-۱۱ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_4	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_5	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_5]$

جدول ۱۱-۱۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_3]$
x_5	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$

گام ۱) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس $\tilde{R}_k$ را با استفاده از عملگر $UEWA$ تلفیق می‌کنیم و مقدار ارزیابی شاخصه کلی $\tilde{z}_i^{(k)}(w)$ را برای گزینه x_i متناظر با تصمیم‌گیرنده d_k بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(w) = {} & 0.1\times[s_0, s_2]\oplus 0.08\times[s_3, s_4]\oplus 0.12\times[s_{-2}, s_0]\oplus 0.09\times[s_2, s_4]\\ & \oplus 0.11\times[s_2, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_2]\oplus 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.10\times[s_1, s_3]\\ & \oplus 0.12\times[s_1, s_2] = [s_{0.75}, s_{2.16}]\end{aligned}$$

به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned}&\tilde{z}_2^{(1)}(w) = [s_{1.64}, s_{2.33}],\ \tilde{z}_3^{(1)}(w) = [s_{1.16}, s_{2.55}],\ \tilde{z}_4^{(1)}(w) = [s_{1.79}, s_{3.34}]\\ &\tilde{z}_5^{(1)}(w) = [s_{1.07}, s_{2.48}],\ \tilde{z}_1^{(2)}(w) = [s_{0.59}, s_{1.81}],\ \tilde{z}_2^{(2)}(w) = [s_{1.32}, s_{2.60}]\\ &\tilde{z}_3^{(2)}(w) = [s_{0.45}, s_{1.89}],\ \tilde{z}_4^{(2)}(w) = [s_{1.78}, s_{3.10}],\ \tilde{z}_5^{(2)}(w) = [s_{1.25}, s_{2.97}]\\ &\tilde{z}_1^{(3)}(w) = [s_{1.49}, s_{2.77}],\ \tilde{z}_2^{(3)}(w) = [s_{1.79}, s_{3.11}],\ \tilde{z}_3^{(3)}(w) = [s_{1.12}, s_{2.67}]\\ &\tilde{z}_4^{(3)}(w) = [s_{1.91}, s_{3.34}],\ \tilde{z}_5^{(3)}(w) = [s_{1.20}, s_{2.51}]\end{aligned}$$

گام ۲) مقادیر ارزیابی کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(w)(k=1, 2, 3)$ برای گزینه x_i متناظر با تصمیم‌گیرندگان $d_k(k=1, 2, 3)$ را با استفاده از عملگر $ULHA$ تلفیق می‌کنیم (فرض کنید بردار وزن عملگر مذکور به صورت $w=(0.3, 0.4, 0.3)$ است). ابتدا از λ, t و $\tilde{z}_i^{(k)}(w)$ برای محاسبه $t\lambda_k\tilde{z}_i^{(k)}(w)$ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&3\lambda_1\tilde{z}_1^{(1)}(w) = [s_{0.788}, s_{2.268}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_2^{(1)}(w) = [s_{1.722}, s_{2.447}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_3^{(1)}(w) = [s_{1.218}, s_{2.678}]\\ &3\lambda_1\tilde{z}_4^{(1)}(w) = [s_{1.880}, s_{3.507}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_5^{(1)}(w) = [s_{1.124}, s_{2.604}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_1^{(2)}(w) = [s_{0.584}, s_{1.792}]\\ &3\lambda_2\tilde{z}_2^{(2)}(w) = [s_{1.307}, s_{2.574}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_3^{(2)}(w) = [s_{0.446}, s_{1.871}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_4^{(2)}(w) = [s_{1.762}, s_{3.069}]\\ &3\lambda_2\tilde{z}_5^{(2)}(w) = [s_{1.238}, s_{2.940}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_1^{(3)}(w) = [s_{1.401}, s_{2.604}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_2^{(3)}(w) = [s_{1.683}, s_{2.923}]\\ &3\lambda_3\tilde{z}_3^{(3)}(w) = [s_{1.053}, s_{2.510}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_4^{(3)}(w) = [s_{1.795}, s_{2.510}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_5^{(3)}(w) = [s_{1.128}, s_{2.360}]\end{aligned}$$

که با توجه به مقادیر فوق، مقادیر ارزیابی شاخصه کلی گروهی $\tilde{z}_i(\lambda, \omega)(i=1, 2, 3, 4, 5)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{z}_1(\lambda, \omega) = 0.3\times[s_{1.401}, s_{2.604}]\oplus 0.4\times[s_{0.788}, s_{2.268}]\oplus 0.3\times[s_{0.584}, s_{1.792}]$$

$$=[s_{0.9107},\ s_{2.2260}]$$

$$\tilde{z}_2(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.683},\ s_{2.923}]\oplus 0.4\times[s_{1.722},\ s_{2.447}]\oplus 0.3\times[s_{1.307},\ s_{2.574}]$$

$$=[s_{1.5858},\ s_{2.6279}]$$

$$\tilde{z}_3(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.218},\ s_{2.678}]\oplus 0.4\times[s_{1.053},\ s_{2.510}]\oplus 0.3\times[s_{0.446},\ s_{1.871}]$$

$$=[s_{0.9204},\ s_{2.3687}]$$

$$\tilde{z}_3(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.880},\ s_{3.507}]\oplus 0.4\times[s_{1.762},\ s_{3.069}]\oplus 0.3\times[s_{1.795},\ s_{2.510}]$$

$$=[s_{1.8073},\ s_{3.0327}]$$

$$\tilde{z}_5(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.238},\ s_{2.940}]\oplus 0.4\times[s_{1.124},\ s_{2.604}]\oplus 0.3\times[s_{1.128},\ s_{2.359}]$$

$$=[s_{1.1594},\ s_{2.6313}]$$

گام ۳) درجات امکان $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\lambda,\ \omega)\geq \tilde{z}_j(\lambda,\ \omega))(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ را با استفاده از معادله (۱–۱۰) محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2716 & 0.4724 & 0.1648 & 0.3827 \\ 0.7284 & 0.5 & 0.6856 & 0.3295 & 0.5841 \\ 0.5276 & 0.3144 & 0.5 & 0.2100 & 0.4141 \\ 0.8352 & 0.6705 & 0.7900 & 0.5 & 0.6945 \\ 0.6173 & 0.4159 & 0.5859 & 0.3055 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ٤) بردار اولویت ماتریس P را با استفاده از معادله (۴–۶) بدست می‌آوریم:

$$v=(0.1646,\ 0.2164,\ 0.1733,\ 0.2495,\ 0.1962)$$

بر اساس عناصر موجود در بردار اولویت، گزینه‌های $x_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_4\succ x_2\succ x_5\succ x_3\succ x_1$$

و بنابراین، منطقه سوم، بهترین گزینه برای سرمایه‌گذاری منطقه‌ای است.

فصل دوازدهم

حل مسائل $MADM$ زبانی غیرقطعی با اطلاعات فاصله‌ای اوزان

در این فصل، ابتدا مفهوم عملگر تلفیق فاصله‌ای[1] (IA) را تشریح کرده و سپس به معرفی یک روش برای حل مسائل $MADM$ مبتنی بر عملگر IA خواهیم پرداخت. همچنین، یک روش برای حل مسائل $MAGDM$ بر اساس عملگرهای IA و $ULHA$ مطرح خواهیم کرد. در نهایت، چگونگی بکارگیری این روشها را برای حل یک مسئله انتخاب مکان مناسب سرمایه‌گذاری ارائه می‌کنیم؛ مسئله‌ای که در آن، شاخصه‌های ارزیابی گزینه‌ها مرتبط با وضعیت سیستمهای اقتصادی–اجتماعی آن گزینه‌ها (مکانهای کاندید) است.

[1] Interval Aggregation (IA)

۱-۱۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه مبتنی بر عملگر *IA*

۱-۱-۱۲ روش تصمیم‌گیری

فرض کنید مقادیر $\tilde{\eta}=[\eta^L, \eta^U]$ و $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]$ به ترتیب به عنوان یک عدد فاصله‌ای و یک متغیر زبانی غیرقطعی باشند. ابتدا قوانین عملیاتی زیر را معرفی خواهیم کرد (ژوو، (۲۰۰۴)[1]):

$$\tilde{\eta}\otimes\tilde{\mu}=[\eta^L, \eta^U]\otimes[s_a, s_b]=[s_{a'}, s_{b'}]$$

که در آن

$$a'=\min\{\eta^L a, \eta^L b, \eta^U a, \eta^U b\},\ \ b'=\max\{\eta^L a, \eta^L b, \eta^U a, \eta^U b\}$$

می‌باشد.

تعریف ۱-۱۲ (ژوو، (۲۰۰۴)) فرض کنید $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, ..., \tilde{w}_n)$ مجموعه‌ای از اعداد فاصله‌ای بوده و $(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n)$ نیز مجموعه‌ای از متغیرهای زبانی غیرقطعی باشد، که در آنها داریم:

$$\tilde{w}_j=[w_j^L, w_j^U],\ w_j^L, w_j^U\in R^+,\ \tilde{\mu}_j=[s_{\alpha_j}, s_{\beta_j}],\ s_{\alpha_j}, s_{\beta_j}\in\bar{S},\ j=1, 2, ..., n$$

آنگاه عملگر:

$$IA_{\tilde{w}}(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n)=\tilde{w}_1\otimes\tilde{\mu}_1\oplus\tilde{w}_2\otimes\tilde{\mu}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{w}_n\otimes\tilde{\mu}_n$$

یک عملگر تلفیق فاصله‌ای (IA) نامیده می‌شود.

در ادامه به معرفی یک روش حل مسائل $MADM$ مبتنی بر عملگر IA خواهیم پرداخت (ژوو، (۲۰۰۴)).

گام ۱) در یک مسئله $MADM$، مقادیر X و U را به ترتیب مجموعه گزینه‌ها و شاخصه‌ها در نظر بگیرید. اطلاعات وزن شاخصه‌ها در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شود. به عبارتی، $\tilde{w}_j=[w_j^L, w_j^U]$ بوده

[1] Xu (2004i)

و $w_j^L,\, w_j^U \in \Re^+$ می‌باشد. همچنین، $\tilde{w} = (\tilde{w}_1,\, \tilde{w}_2,\, ...,\, \tilde{w}_m)$ را در نظر بگیرید. تصمیم‌گیرنده مقدار ارزیابی زبانی غیرقطعی $\tilde{r}_{ij}$ برای هر گزینه x_i را با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد، که در آن $\tilde{r}_{ij} \in \tilde{S}$ است.

گام ۲) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر ماتریس $\tilde{R}$ را با استفاده از عملگر IA تلفیق کرده و مقدار ارزیابی شاخصه کلی $\tilde{z}_i(\tilde{w})$ را برای گزینه x_i بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\tilde{w}) = IA_{\tilde{w}}(\tilde{r}_{i1},\, \tilde{r}_{i2},\, ...,\, \tilde{r}_{im}) = \tilde{w}_1\tilde{r}_{i1} \oplus \tilde{w}_2\tilde{r}_{i2} \oplus \cdots \oplus \tilde{w}_m\tilde{r}_{im}$$

گام ۳) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\tilde{w}) \geq \tilde{z}_j(\tilde{w}))(i,\ j = 1,\, 2,\, ...,\, n)$ را توسط معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\tilde{w})$ ها محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٤) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت $v = (v_1,\, v_2,\, ...,\, v_n)$ ماتریس P استفاده کنید، و سپس گزینه‌های $x_i(i = 1,\, 2,\, ...,\, n)$ را رتبه‌بندی و انتخاب کنید.

۱۲-۱-۲ مثال کاربردی

مثال ۱-۱۲ ارزیابی سیستمهای اقتصادی-اجتماعی، نظیر ارزیابی محیط سرمایه‌گذاری، کارایی و اثربخشی بهبودهای انجام شده در فضای کسب‌وکار، برنامه‌ریزی شهری و امثال آن شامل جنبه‌های سیاسی، اقتصادی، فناوری، زیست‌محیطی و فرهنگی است. با در نظر گرفتن پیچیدگی این نوع از مسائل تصمیم‌گیری، اطلاعات مرتبط فراهم شده توسط تصمیم‌گیرنده‌ها، معمولاً غیرقطعی یا فازی هستند. در اینجا، یک مسئله تصمیم‌گیری در قالب انتخاب یک شهر از میان پنج شهر (یعنی از میان گزینه‌های $x_i(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5)$) برای سرمایه‌گذاری مطرح می‌باشد و نُه شاخصه برای ارزیابی این شهرها بمنظور شناسایی شهر برتر برای سرمایه‌گذاری وجود دارد (لی و همکاران، (۲۰۰۱)[1]). این شاخصه‌ها عبارتند از: (۱) u_1: محیط سیاسی، (۲) u_2: محیط اقتصادی، (۳) u_3: محیط مالی، (۴) u_4: محیط مدیریتی، (۵) u_5:

[1] Li et al. (2001)

محیط بازار، (۶) u_6: شرایط فنی، (۷) u_7: وجود مواد اولیه، (۸) u_8: محیط قانونی و (۹) u_9: محیط طبیعی.
فرض کنید اطلاعات وزن ارزیابی شاخصه‌ها در قالب اعداد فاصله‌ای بیان می‌شود. یعنی:

$$\tilde{w}_1 = [0.08, 0.10],\ \tilde{w}_2 = [0.05, 0.09],\ \tilde{w}_3 = [0.10, 0.12]$$
$$\tilde{w}_4 = [0.08, 0.11],\ \tilde{w}_5 = [0.10, 0.13],\ \tilde{w}_6 = [0.12, 0.14]$$
$$\tilde{w}_7 = [0.14, 0.16],\ \tilde{w}_8 = [0.09, 0.11],\ \tilde{w}_{10} = [0.11, 0.15]$$

تصمیم‌گیرنده مقیاس ارزیابی زبانی جمع‌پذیر[1] زیر را برای ارزیابی محیطهای سرمایه‌گذاری شهرهای $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ بر حسب شاخصه‌های $u_j (j = 1, 2, ..., 9)$ به‌کار می‌گیرد و ماتریس تصمیم زبانی $\tilde{R}$ را مطابق جدول (۱۲-۱) تشکیل می‌دهد:

$S = \{s_i \mid i = -5, ..., 5\}$
= {شدیداً ضعیف، خیلی ضعیف، کمی‌ضعیف، ضعیف، نسبتاً ضعیف، متوسط،
نسبتاًخوب، خوب، کمی‌خوب، خیلی‌خوب، عمیقاًخوب}

جدول ۱-۱۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_0, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$

[1] Additive Linguistic Evaluation Scale

در ادامه، مسئله فوق را با استفاده از روش معرفی شده در بخش (۱۲-۱-۱) حل خواهیم کرد.

گام ۱) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از $\tilde{R}$ را با استفاده از عملگر IA تلفیق کنید و مقدار ارزیابی شاخصه کلی $\tilde{z}_i(\tilde{w})$ برای گزینه x_i را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_1(\tilde{w}) = {} & [0.08, 0.10]\otimes[s_1, s_2]\oplus[0.05, 0.09]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.10, 0.12]\otimes[s_1, s_2]\oplus[0.08, 0.11]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.10, 0.13]\otimes[s_0, s_1]\oplus[0.12, 0.14]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.14, 0.16]\otimes[s_{-1}, s_2]\oplus[0.09, 0.11]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.11, 0.15]\otimes[s_2, s_3] = [s_{0.94}, s_{2.69}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_2(\tilde{w}) = {} & [0.08, 0.10]\otimes[s_0, s_3]\oplus[0.05, 0.09]\otimes[s_{-1}, s_1] \\
& \oplus[0.10, 0.12]\otimes[s_2, s_3]\oplus[0.08, 0.11]\otimes[s_0, s_1] \\
& \oplus[0.10, 0.13]\otimes[s_2, s_4]\oplus[0.12, 0.14]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.14, 0.16]\otimes[s_2, s_3]\oplus[0.09, 0.11]\otimes[s_3, s_4] \\
& \oplus[0.11, 0.15]\otimes[s_1, s_2] = [s_{1.25}, s_{2.92}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_3(\tilde{w}) = {} & [0.08, 0.10]\otimes[s_0, s_1]\oplus[0.05, 0.09]\otimes[s_0, s_2] \\
& \oplus[0.10, 0.12]\otimes[s_1, s_2]\oplus[0.08, 0.11]\otimes[s_0, s_1] \\
& \oplus[0.10, 0.13]\otimes[s_1, s_3]\oplus[0.12, 0.14]\otimes[s_0, s_2] \\
& \oplus[0.14, 0.16]\otimes[s_2, s_3]\oplus[0.09, 0.11]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.11, 0.15]\otimes[s_1, s_2] = [s_{0.77}, s_{2.41}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_4(\tilde{w}) = {} & [0.08, 0.10]\otimes[s_0, s_1]\oplus[0.05, 0.09]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.10, 0.12]\otimes[s_1, s_2]\oplus[0.08, 0.11]\otimes[s_2, s_3] \\
& \oplus[0.10, 0.13]\otimes[s_0, s_2]\oplus[0.12, 0.14]\otimes[s_1, s_2] \\
& \oplus[0.14, 0.16]\otimes[s_3, s_4]\oplus[0.09, 0.11]\otimes[s_1, s_3] \\
& \oplus[0.11, 0.15]\otimes[s_0, s_2] = [s_{1.05}, s_{2.75}]
\end{aligned}$$

گام ۲) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\tilde{w}) \geq \tilde{z}_j(\tilde{w}))$ را با استفاده از معادله (۱۰-۱) و مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\tilde{w})$ ها محاسبه کرده و ماتریس درجات امکان را تشکیل دهید:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4211 & 0.5664 & 0.4754 & 0.5405 \\ 0.5789 & 0.5 & 0.6495 & 0.5549 & 0.6133 \\ 0.4336 & 0.3505 & 0.5 & 0.4072 & 0.4812 \\ 0.5246 & 0.4451 & 0.5928 & 0.5 & 0.5635 \\ 0.4595 & 0.3867 & 0.5188 & 0.4365 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ۳) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت ماتریس P استفاده کنید:

$$v=(0.2002,\ 0.2198,\ 0.1836,\ 0.2063,\ 0.1901)$$

که بر اساس عناصر موجود در بردار اولویت، گزینه‌های $x_i\,(i=1,2,3,4,5)$ را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_3$$

و درمی‌یابیم که شهر دوم از سایر شهرها برای سرمایه‌گذاری بهتر است.

۱۲-۲ تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی مبتنی بر عملگرهای *IA* و *ULHA*

۱۲-۲-۱ روش تصمیم‌گیری

در ادامه، به معرفی یک روش برای حل مسائل *MAGDM* می‌پردازیم که مبتنی بر عملگرهای *IA* و *ULHA* می‌باشد (ژوو، (۲۰۰۴)[1]):

گام ۱) در یک مسئله *MAGDM*، مجموعه‌های X، U و D را به ترتیب به عنوان مجموعه گزینه‌ها، شاخصه‌ها و تصمیم‌گیرندگان در نظر بگیرید. اوزان شاخصه‌ها در قالب اعداد فاصله‌ای $\tilde{w}_j=[w_j^L, w_j^U],\ w_j^L, w_j^U \in \Re^+$ بیان می‌شوند. همچنین، $\tilde{w}=(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_m)$ را در نظر بگیرید.

[1] Xu (2004i)

بردار وزن تصمیم‌گیرندگان برابر $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t)$ است که در آن $\lambda_k \geq 0 \,(k=1, 2, ..., t)$ و $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$ است. تصمیم‌گیرنده $d_k \in D$ مقدار ارزیابی زبانی غیرقطعی $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ برای گزینه $x_i \in X$ را با در نظر گرفتن هر شاخصه $u_j \in U$ بیان کرده و ماتریس ارزیابی $\tilde{R}_k = (\tilde{r}_{ij}^{(k)})_{n\times m}$ را تشکیل می‌دهد که در آن $\tilde{r}_{ij}^{(k)} \in \tilde{S}$ می‌باشد.

گام ۲) از عملگر IA برای تلفیق اطلاعات ارزیابی زبانی غیرقطعی در i امین سطر $\tilde{R}_k$ استفاده کرده و مقدار ارزیابی کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ برای گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k را بدست آورید:

$$\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w}) = IA_{\tilde{w}}(\tilde{r}_{i1}^{(k)}, \tilde{r}_{i2}^{(k)}, ..., \tilde{r}_{im}^{(k)}) = \tilde{w}_1\tilde{r}_{i1}^{(k)} \oplus \tilde{w}_2\tilde{r}_{i2}^{(k)} \oplus ... \oplus \tilde{w}_m\tilde{r}_{im}^{(k)}$$

گام ۳) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ برای گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k را با استفاده از عملگر $ULHA$ تلفیق کرده و مقدار شاخصه کلی گروهی $z_i\,(\lambda, \omega)$ برای گزینه x_i را بدست آورید:

$$\tilde{z}_i(\lambda, \omega) = ULHA_{\lambda,\omega}(\tilde{z}_i^{(1)}(\tilde{w}), \tilde{z}_i^{(2)}(\tilde{w}), ..., \tilde{z}_i^{(t)}(\tilde{w})) = \omega_1 \tilde{v}_i^{(1)} \oplus \omega_2 \tilde{v}_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus \omega_t \tilde{v}_i^{(t)}$$

که $\omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t)$ بردار وزن عملگر $ULHA$ است و نیز $\omega_k \in [0, 1]$ و $\sum_{k=1}^{t} \omega_k = 1$ می‌باشند. همچنین $\tilde{v}_i^{(k)}$، kامین مجموعه بزرگ از متغیرهای زبانی غیرقطعی وزن‌دار $(t\lambda_1\tilde{z}_i^{(1)}(\tilde{w}), t\lambda_2\tilde{z}_i^{(2)}(\tilde{w}), ..., t\lambda_t\tilde{z}_i^{(t)}(\tilde{w}))$ می‌باشد و t ضریب متعادل‌ساز است.

گام ٤) درجات امکان $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\lambda, \omega) \geq \tilde{z}_j(\lambda, \omega))$ را از طریق معادله (۱۰-۱) و با مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\lambda, \omega)$ محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان $P=(p_{ij})_{n\times n}$ را تشکیل دهید.

گام ٥) از معادله (۴-۶) برای استخراج بردار اولویت ماتریس P استفاده کرده و گزینه‌های $x_i\,(i=1, 2, ..., n)$ را رتبه‌بندی و انتخاب نمائید.

۲-۲-۱۲ مثال کاربردی

مثال ۲-۱۲ در اینجا از مثال (۱-۱۲) به منظور درک بهتر مفاهیم بیان شده در بخش (۱-۲-۱۲) استفاده می‌کنیم. فرض کنید سه تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1,2,3)$ با بردار وزن $\lambda=(0.34, 0.33, 0.33)$ ماتریسهای تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_k\,(k=1,2,3)$ را مطابق جداول (۲-۱۲)، (۳-۱۲) و (۴-۱) تشکیل می‌دهند:

جدول ۲-۱۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_4, s_5]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_5	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_1]$
x_4	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$

جدول ۳-۱۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_0]$
x_4	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_{-1}, s_0]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_0]$
x_5	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$

جدول ۴-۱۲ ماتریس تصمیم زبانی غیرقطعی $\tilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$

گام ۱) اطلاعات ارزیابی زبانی در i امین سطر از $\tilde{R}_k$ را به وسیله عملگر IA تلفیق کرده و مقدار ارزیابی کلی شاخصه $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده d_k محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(\tilde{w}) = &[0.08, 0.10]\otimes[s_{-1}, s_0]\oplus[0.05, 0.09]\otimes[s_0, s_1]\\ &\oplus[0.10, 0.12]\otimes[s_3, s_4]\oplus[0.08, 0.11]\otimes[s_1, s_2]\\ &\oplus[0.10, 0.13]\otimes[s_0, s_2]\oplus[0.12, 0.14]\otimes[s_3, s_4]\\ &\oplus[0.14, 0.16]\otimes[s_2, s_3]\oplus[0.09, 0.11]\otimes[s_3, s_4]\end{aligned}$$

$$\oplus[0.11,\ 0.15]\otimes[s_1,\ s_3]=[s_{1.32},\ s_{2.98}]$$

به طور مشابه داریم:

$$\tilde{z}_2^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.60},\ s_{3.44}],\ \tilde{z}_3^{(1)}(\tilde{w})=[s_{0.98},\ s_{3.13}],\ \tilde{z}_4^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.51},\ s_{3.26}]$$
$$\tilde{z}_5^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.24},\ s_{3.05}],\ \tilde{z}_1^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.23},\ s_{3.30}],\ \tilde{z}_2^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.03},\ s_{2.73}]$$
$$\tilde{z}_3^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.29},\ s_{2.94}],\ \tilde{z}_4^{(2)}(\tilde{w})=[s_{0.49},\ s_{2.77}],\ \tilde{z}_5^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.22},\ s_{3.10}]$$
$$\tilde{z}_1^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.37},\ s_{3.23}],\ \tilde{z}_2^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.76},\ s_{3.85}],\ \tilde{z}_3^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.59},\ s_{3.38}]$$
$$\tilde{z}_4^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.73},\ s_{3.67}],\ \tilde{z}_5^{(3)}(\tilde{w})=[s_{0.88},\ s_{3.22}]$$

گام ۲) مقادیر کلی شاخصه‌های $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ برای هر گزینه x_i متناظر با هر تصمیم‌گیرنده $d_k\,(k=1,2,3)$ را با استفاده از عملگر *ULHA* تلفیق می‌کنیم (گیریم که بردار وزن آن $\omega=(0.3,\ 0.4,\ 0.3)$ باشد). به عبارتی، ابتدا از $\lambda,\ t$ و $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ برای محاسبه $t\lambda_k\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{w})$ استفاده می‌کنیم:

$$3\lambda_1\tilde{z}_1^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.346},\ s_{3.040}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_2^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.632},\ s_{3.509}]$$
$$3\lambda_1\tilde{z}_3^{(1)}(\tilde{w})=[s_1,\ s_{3.193}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_4^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.540},\ s_{3.325}]$$
$$3\lambda_1\tilde{z}_5^{(1)}(\tilde{w})=[s_{1.265},\ s_{3.111}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_1^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.218},\ s_{3.267}]$$
$$3\lambda_2\tilde{z}_2^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.020},\ s_{2.703}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_3^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.277},\ s_{2.911}]$$
$$3\lambda_2\tilde{z}_4^{(2)}(\tilde{w})=[s_{0.485},\ s_{2.742}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_5^{(2)}(\tilde{w})=[s_{1.208},\ s_{3.069}]$$
$$3\lambda_3\tilde{z}_1^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.356},\ s_{3.198}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_2^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.742},\ s_{3.812}]$$
$$3\lambda_3\tilde{z}_3^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.574},\ s_{3.346}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_4^{(3)}(\tilde{w})=[s_{1.713},\ s_{3.633}]$$
$$3\lambda_3\tilde{z}_5^{(3)}(\tilde{w})=[s_{0.871},\ s_{3.188}]$$

سپس، مقدار کلی شاخصه گروهی $\tilde{z}_i\,(\lambda,\ \omega)$ برای گزینه x_i را بدست می‌آوریم:

$$\tilde{z}_1(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.356},\ s_{3.198}]\oplus0.4\times[s_{1.218},\ s_{3.267}]\oplus0.3\times[s_{1.346},\ s_{3.040}]$$
$$=[s_{1.298},\ s_{3.178}]$$
$$\tilde{z}_2(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.742},\ s_{3.812}]\oplus0.4\times[s_{1.632},\ s_{3.509}]\oplus0.3\times[s_{1.020},\ s_{2.703}]$$
$$=[s_{1.481},\ s_{3.358}]$$
$$\tilde{z}_3(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.574},\ s_{3.346}]\oplus0.4\times[s_{1.277},\ s_{2.911}]\oplus0.3\times[s_1,\ s_{3.193}]$$

$$=[s_{1.283},\ s_{3.126}]$$
$$\tilde{z}_4(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.713}\ ,\ s_{3.633}]\oplus 0.4\times[s_{1.540}\ ,\ s_{3.325}]\oplus 0.3\times[s_{0.485}\ ,\ s_{2.742}]$$
$$=[s_{1.275},\ s_{3.243}]$$
$$\tilde{z}_5(\lambda,\ \omega)=0.3\times[s_{1.265}\ ,\ s_{3.111}]\oplus 0.4\times[s_{1.208}\ ,\ s_{3.069}]\oplus 0.3\times[s_{0.871}\ ,\ s_{3.188}]$$
$$=[s_{1.124},\ s_{3.117}]$$

گام ۳) درجات امکان $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\lambda,\ \omega)\geq \tilde{z}_j(\lambda,\ \omega))(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ را توسط معادله (۱۰-۱) و با مقایسه زوجی $\tilde{z}_i(\lambda,\ \omega)$ محاسبه کرده و ماتریس درجه امکان را تشکیل می‌دهیم:

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4517 & 0.5090 & 0.4945 & 0.5198 \\ 0.5483 & 0.5 & 0.5578 & 0.5417 & 0.5773 \\ 0.4910 & 0.4422 & 0.5 & 0.4857 & 0.5219 \\ 0.5055 & 0.4583 & 0.5143 & 0.5 & 0.5350 \\ 0.4697 & 0.4227 & 0.4781 & 0.4650 & 0.5 \end{pmatrix}$$

گام ٤) از معادله (۴-۶) به منظور استخراج بردار اولویت P استفاده می‌کنیم:

$$v=(0.1993,\ 0.2113,\ 0.1970,\ 0.2006,\ 0.1918)$$

بر اساس عناصر موجود در بردار اولویت فوق، گزینه‌های $x_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ را رتبه‌بندی می‌کنیم:

$$x_2\succ x_4\succ x_1\succ x_3\succ x_5$$

بنابراین، بهترین شهر برای سرمایه‌گذاری، گزینه دوم است.

منابع

Aczél J, Alsina C. 1987. Synthesizing judgements: A functional equation approach. Mathematical Modelling, 9: 311-320.

Barbean E. 1986. Perron's result and a decision on admissions tests. Mathematics Magazine, 59: 12-22.

Beliakov G, Pradera A, Calvo T. 2007. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Heidelberg: Springer.

Blankmeyer E. 1987. Approaches to consistency adjustment. Journal of Optimization Theory and Applications, 479-488.

Bonferroni C. 1950. Sulle medie multiple di potenze. Bolletino Matematica Italiana, 5: 267-270.

Bullen P S. 2003. Handbook of Mean and Their Inequalties. Dordrecht: Kluwer.

Chen C Y, Xu L G. 2001. Partner selection model in supply chain management. Chinese Journal of Management Science, 9(Suppl.): 57-62.

Chen D L, Li Z C. 2002. The appraisement index insuring of information system investment and method for grey comprehensive appraisement. Systems Engineering---Theory & Practice, 22(2): 100-103.

Chen S H. 1985. Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set. Fuzzy Sets and Systems, 17: 113-129.

Chen Y, Luo X M, Gu Q P. 2003. The application of mathematical programming to the study of space equipment system construction project and planning auxiliary decision system. Proceedings of the fifth Youth scholars Conference on operations research and management. Global-Link Informatics Press, Hongkong, 409-415.

Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. 1998. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 97: 33-48.

Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. 2001. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision making model based on fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 122: 277-291.

Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E, Martinez L. 2003. A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 137: 71-83.

Choquet G. 1953. Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier, 5: 131-296.

Cogger K O, Yu P L. 1985. Eigenweight vector and least-distance approximating for revealized preference in pairwise weight ratios. Journal of Optimization Theory and Applications, 46: 483-491.

Cordón O, Herrera F, Zwir I. 2002. Linguistic modeling by hierarchical systems of linguistic rules. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10: 2-20.

Crawford G, Williams C. 1985. A note on the analysis of subjective judgement matrices. Journal of Mathematical Psychology, 29: 387-405.

Da Q L, Liu X W. 1999. Interval number linear programming and its satisfactory solution. Systems Engineering—Theory & Practice, 19(4): 3-7.

Da Q L, Xu Z S. 2002. Singule-objective optimization model in uncertain multi-attribute decision making. Journal of Systems and Engineering, 17(1): 50-55.

Dai Y Q, Xu Z S, Li Y, Da Q L. 2008. New assessment labels based on linguistic information and applications. Chinese Management Science 16(2): 145-149.

Dantzig G B. 1963. Linear Programming and Extensions. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Dubois D, Prade H. 1986. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. Information Sciences, 39: 205-210.

Duckstein L, Zionts S. 1992. Multiple Criteria Decision Making, New York: Springer.

Du D. 1996. Mathematical transformation method for consistency of judgement matrix in AHP. Decision Science and Its Application. Beijing: Ocean press.

Du X M, Yu Y L, Hu H. 1999. Case-based reasoning for multi-attribute evaluation. Systems Engineering and Electronics, 21(9): 45-48.

Facchinetti G, Ricci R G, Muzzioli S. 1998. Note on ranking fuzzy triangular numbers. International Journal of Intelligent Systems, 13: 613-622.

Fan Z P, Hu G F. 2000. A goal programming method for interval multi-attribute decision making, Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 14: 50-52.

Fan Z P, Ma J, Zhang Q. 2002. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives. Fuzzy Sets and Systems, 131: 101-106.

Fan Z P, Zhang Q. 1999. The revision for the uncertain multiple attribute decision making models. Systems Engineering---Theory & Practice, 19(12): 42-47.

Fernandez E, Leyva J C. 2004. A method based on multi-objective optimization for deriving a ranking from a fuzzy preference relation. European Journal of Operational Research, 154: 110-124.

Gao F J. 2000. Multiple attribute decision making on plans with alternative preference under incomplete information. Systems Engineering---Theory & Practice, 22(4): 94-97.

Genc S, Boran F E, Akay D, Xu Z S. 2010. Interval multiplicative transitivity for consistency, missing values and priority weights of interval fuzzy preference relations. Information Sciences, 180: 4877-4891.

Genst C, Lapointe F. 1993. On a proposal of Jensen for the analysis of ordinal pairwise preferences using Saaty's eigenvector scaling method. Journal of Mathematical Psychology, 37: 575-610.

Goh C H, Tung Y C A, Cheng C H. 1996. A revised weighted sum decision model for robot selection. Computers & Industrial Engineering, 30: 193-199.

Golden B L, Wasil E A, Harker P T. 1989. The Analytic Hierarchy Process: Applications and Studied, New York: Springer Verlag.

Guo D Q, Wang Z J. 2000. The mathematical model of the comprehensive evaluation on MIS. Operations Research and Management Science, 9(3): 74-80.

Harker P T, Vargas L G. 1987. The theory of ratio scale estimation: Saaty's analytic hierarchy process. Management Science, 33: 1383-1403.

Harsanyi J C. 1955. Cardinal welfare, individualistic ethics, and interpersonal comparisons of utility. Journal of Political Economy, 63: 309-321.

Hartley R. 1985. Linear and Nonlinear Programming: An Introduction to Linear Methods in Mathematical Programming. ELLIS Horwood Limited, England.

Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. 1995. A sequential selection process in group decision making with linguistic assessment. Information Sciences, 1995, 85: 223-239.

Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. 2001. Multi-person decision making based on multiplicative preference relations. European Journal of Operational Research, 129: 372-285.

Herrera F, Herrera-Viedma E, Martínez L. 2000. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. Fuzzy Sets and Systems, 114: 43-58.

Herrera F, Martínez L. 2001. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multi-granular hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision making. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 31: 227-233.

Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, Luque M. 2004. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. European Journal of Operational Research, 154: 98-109.

Herrera-Viedma E, Martínez L, Mata F, Chiclana F. 2005. A consensus support systems model for group decision making problems with multigranular linguistic preference relations. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 13: 644-658.

Hu Q S, Zheng C Y, Wang H Q. 1996. A practical optimum decision and application of fuzzy several objective system. Systems Engineering---Theory & Practice, 16(3): 1-5.

Huang L J. 2001. The mathematical model of the comprehensive evaluation on enterprise knowledge management. Operations Research and Management Science, 10(4): 143-150.

Hwang C L, Yoon K. 1981. Multiple Attribute Decision Making and Applications. New York: Springer-Verlag.

Jensen R E. 1984. An alternative scaling method for priorities in hierarchy structures. Journal of Mathematical Psychology, 28: 317-332.

Kacprzyk J. 1986. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. Fuzzy Sets and Systems, 18: 105-118.

Kim S H, Ahn B S. 1997. Group decision making procedure considering preference strength under incomplete information. Computers and Operations Research, 24: 1101-1112.

Kim S H, Ahn B S. 1999. Interactive group decision making procedure under incomplete information. European Journal of Operational Research, 116: 498-507.

Kim S H, Choi S H, Kim J K. 1999. An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information: Rang-based approach. European Journal of Operational Research, 118: 139-152.

Li S C, Chen J D, Zhao H G. 2001. Studying on the method of appraising qualitative decision indication system. Systems Engineering---Theory & Practice, 21(9): 22-32.

Li Z G, Zhong Zhen. 2003a. Fuzzy optimal selection model and application of tank unit firepower systems deployment schemes. Proceedings of the fifth Youth scholars Conference on operations research and management. Global-Link Informatics Press, Hongkong, 317-321.

Li Z G, Zhong Zhen. 2003b. Grey cluster analysis on selecting key defensive position. Proceedings of the fifth Youth scholars Conference on operations research and management. Global-Link Informatics Press, Hongkong, 401-405.

Li Z M, Chen D Y. 1991. Analysis of training effectiveness for military trainers. Systems Engineering---Theory & Practice, 11(4): 75-79.

Lipovetsky S, Michael Conklin W. 2002. Robust estimation of priorities in the AHP. European Journal of Operational Research, 137: 110-122.

Liu J X, Liu Y W. 1999. A multiple attribute decision making with preference information. Systems Engineering and Electronics, 21(1): 4-7.

Liu J X, Huang D C. 2000b. The optimal linear assignment method for multiple attribute decision making. Systems Engineering and Electronics, 22(7): 25-27.

Mu F L, Wu C, Wu D W. 2003. Study on the synthetic method of variable weight of effectiveness evaluation of maintenance support system. Systems Engineering and Electronics, 25(6): 693- 696.

Nurmi H. 1981. Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 6: 249-259.

Orlovsky S A. 1978. Decision making with a fuzzy preference relation. Fuzzy Sets and Systems, 1: 155-167.

Park K S, Kim S H. 1997. Tools for interactive multi-attribute decision making with incompletely indentified information. European Journal of Operational Research, 98: 11-123.

Park K S, Kim S H, Yoon Y C. 1996. Establishing strict dominance between alternatives with special type of incomplete information. European Journal of Operational Research, 96: 398-406.

Qian G, Xu Z S. 2003. Tree optimization models based on ideal points for uncertain multi-attribute decision making. Systems Engineering and Electronics, 25(5): 517-519.

Roubens M. 1989. Some properties of choice functions based on valued binary relations. European Journal of Operational Research, 40: 309-321.

Roubens M. 1996. Choice procedures in fuzzy multicriteria decision analysis based on pairwise comparisons. Fuzzy Sets and Systems, 84: 135-142.

Saaty T L. 1980. The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw-Hill.

Saaty T L. 1986. Axiomatic foundations of the analytic hierarchy process. Management Science, 20: 355-360.

Saaty T L. 1990. Multi-criteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation, The Analytic Hierarchy Process Series: Volume I, Pittsburgh, PA: RMS Publications.

Saaty T L. 1994. Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Aanalytic Heirarchy Process, The Analytic Hierarchy Process Series: Volumes VI, Puttsburgh, PA: RMS Publications.

Saaty T L. 1995. Decision Making for Leaders, The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World. Pittsburgh: RWS Publications.

Saaty T L. 1996. The Hierarchy Network Process. Pittsburgh: RWS Publications.

Saaty T L. 2001. Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process, Pittsburgh, PA: RWS Publications.

Saaty T L. 2003. Decision making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. European Journal of Operational Research, 145: 85-91.

Saaty T L, Alexander J M. 1981. Thinking with Models. New York: Praeger.

Saaty T L, Alexander J M. 1989. Conflict Resolution: The Analytic Hierarchy Approach. New York: Praeger.

Saaty T L, Hu G. 1998. Ranking by the eigenvector versus other methods in the analytic hierarchy process. Applied Mathematical Letters, 11: 121-125.

Saaty T L, Kearns K P. 1985. Analytic Planning—The Organization of Systems. Oxford, England: Pergamon Press.

Saaty T L, Vargas L G. 1982. The Logic of Priorities: Applications in Business, Energy, Health, and Transportation. Boston, MA: Kluwer-Nijhoff Publishing Co.

Saaty T L, Vargas L G. 1984. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. Mathematical Modeling, 5: 309-324.

Saaty T L, Vargas L G. 1994. Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environments with the Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh: RMS Publications.

Salo A A. 1995. Interactive decision aiding for group decision support. European Journal of Operational Research, 84: 134-149.

Salo A A, Hämäläinen R P. 2001. Preference ratios in multi-attribute evaluation (PRIME)-Elicitation and decision procedures under incomplete information. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A, 31: 533-545.

Sheng C F, Xu W X, Xu B G. 2003. Study on the evaluation of competitiveness of provincial investment environment in China. Chinese Journal of Management Science, 11(3): 76-81.

Song F M, Chen T T. 1999. Study on evaluation index system of high-tech investment project. China Soft Science, 1: 90-93.

Tanino T. 1984. Fuzzy preference orderings in group decision making. Fuzzy Sets and Systems, 12: 117-131.

Teng C X, Bi K X, Su W L, Yi D L. 2000. Application of attribute synthetic assessment system to finance evaluation of colleges and universities. Systems Engineering—Theory & Practice, 20(4): 115-119.

Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. 1983. A fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems, 11: 229-240.

Wang L F, Xu S B. 1989. An Introduction to Analytic Hierarchy Process. Beijing: China Renmin University Press.

Wang Y M. 1995. An overview of priority methods for judgement matrices. Decision and Decision Support Systems, 5(3): 101-114.

Wang Y M. 1998. Using the method of maximizing deviations to make decision for multi-indicies. Systems Engineering and Electronics, 20(7): 24-26.

Xia M M, Xu Z S. 2011. Some issues on multiplicative consistency of interval fuzzy preference relations. International Journal of Information Technology and Decision Making, 10: 1043- 1065.

Xiong R, Cao K S. 1992. Hierarchical analysis of multiple criteria decision making. Systems Engineering---Theory & Practice, 12(6): 58-62.

Xu J P. 1992. Double-base-points-based optimal selection method for multiple attribute comment. Systems Engineering, 10(4): 39-43.

Xu R N, Zhai X Y. 1992. Extensions of the analytic hierarchy process in fuzzy environment. Fuzzy Sets and Systems 52: 251-257.

Xu Z S. 1998. A new scale method in analytic hierarchy process. Systems Engineering—Theory & Practice, 18(10): 74-77.

Xu Z S. 1999. Study on the relation between two classes of scales in AHP. Systems Engineering— Theory & Practice, 19(7): 97-101.

Xu Z S. 2000a. A new method for improving the consistency of judgement matrix. Systems Engineering—Theory & Practice, 20(4): 86-89.

Xu Z S. 2000b. A simulation based evaluat ion of several scales in the analytic hierarchy Process. Systems Engineering—Theory & Practice, 20(7): 58-62.

Xu Z S. 2000c. Generalized chi square method for the estimation of weights. Journal of Optimization Theory and Application, 107: 183-192.

Xu Z S. 2000d. Study on the priority method of fuzzy comprehensive evaluation. Systems Engineering Systems Science and Complexity Research. Research Information Ltd, United Kingdom, 507-511.

Xu Z S. 2001a. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix. Journal of Systems Engineering, 16(4): 311-314.

Xu Z S. 2001b. Maximum deviation method based on deviation degree and possibility degree for uncertain multi-attribute decision making. Control and Decision, 16(supplement), 818-821.

Xu Z S. 2001c. The least variance priority method (LVM) for fuzzy complementary judgement matrix. Systems Engineering—Theory & Practice, 21(10): 93-96.

Xu Z S. 2002a. Interactive method based on alternative achievement scale and alternative comprehensive scale for multi-attribute decision making problems. Control and Decision, 17(4): 435-438.

Xu Z S. 2002b. New method for uncertain multi-attribute decision making problems. Journal of Systems Engineering, 17(2): 176-181.

Xu Z S. 2002c. On method for multi-objective decision making with partial weight information. Systems Engineering—Theory & Practice, 22(1): 43-47.

Xu Z S. 2002d. Study on methods for multiple attribute decision making under some situations. Southeast University PhD Dissertation.

X Z S. 2002e. Two approaches to improving the consistency of complementary judgement matrix. Applied. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 17: 227-235.

Xu Z S. 2002f. Two methods for priorities of complementary judgement matrices---weighted least square method and eigenvector method. Systems Engineering—Theory & Practice, 22(1): 43- 47.

Xu Z S. 2003a. A method for multiple attribute decision making without weight information but with preference Information on alternatives. Systems Engineering---Theory and Practice, 23(12): 100-103.

Xu Z S. 2003b. A practical approach to group decision making with linguistic information. Technical Report.

Xu Z S. 2004a. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. Information Sciences 166: 19-30.

Xu Z S. 2004b. An ideal point based approach to multi-criteria decision making with uncertain linguistic information. Proceedings of the 3th International Conference on Machine Learning and Cybernetics, August 26-29, Shanghai, China, 2078-2082.

Xu Z S. 2004c. EOWA and EOWG operators for aggregation linguistic labels based on linguistic preference relations. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12: 791-810.

Xu Z S. 2004d. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. International Journal of Approximate Reasoning, 36: 261-270.

Xu Z S. 2004e. Incomplete complementary judgement matrix. Systems Engineering---Theory and Practice, 24(6): 91-97.

Xu Z S. 2004f. Method based on fuzzy linguistic assessments and GIOWA operator in multi- attribute group decision making. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 24(2): 218-224.

Xu Z S. 2004g. Method for multi-attribute decision making with preference information on alternatives under partial weight information. Control and Decision, 19(1): 85-88.

Xu Z S. 2004h. On compatibility of interval fuzzy preference relations. Fuzzy Optimization and Decision Making, 3(3): 225-233.

Xu Z S. 2004i. Some new operators for aggregating uncertain linguistic information. Technical Report.

Xu Z S. 2004j. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. Information Sciences, 168: 171-184.

Xu Z S. 2005a. A procedure based on synthetic projection model for multiple attribute decision making in uncertain setting. Lecture Series on Computer and Computational Sciences, 2: 141- 145.

Xu Z S. 2005b. Deviation measures of linguistic preference relations in group decision making. Omega, 33: 249-254.

Xu Z S. 2005c. An overview of methods for determining OWA weights. International Journal of Intelligent Systems, 20(8): 843-865.

Xu Z S. 2005d. The hybrid linguistic weighted averaging operator. Information: An International Journal, 2005, 8: 453-456.

Xu Z S. 2006a. A direct approach to group decision making with uncertain additive linguistic preference relations. Fuzzy Optimization and decision making, 5(1): 23-35.

Xu Z S. 2006b. Multiple attribute group decision making with multiplicative preference information. Proceedings of 2006 International Conference on Management Science & Engineering, August 8-10, South-Central University for Nationalities, China, pp.1383-1388.

Xu Z S. 2007a. A survey of preference relations. International Journal of General Systems 36: 179- 203.

Xu Z S. 2007b. Multiple attribute group decision making with different formats of preference information on attributes. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, 37: 1500-1511.

Xu Z S. 2009a. An interactive approach to multiple attribute group decision making with multigranular uncertain linguistic information. Group Decision and Negotiation 18: 119-145.

Xu Z S. 2009b. Multi-period multi-attribute group decision-making under linguistic assessments. International Journal of General Systems, 38: 823-850.

Xu Z S. 2010. Uncertain Bonferroni mean operators. International Journal of Computational Intelligence Systems, 3: 761-769.

Xu Z S. 2011. Consistency of interval fuzzy preference relations in group decision making. Applied Soft Computing, 11: 3898-3909.

Xu Z S. 2012a. A consensus reaching process under incomplete multiplicative preference relations. International Journal of General Systems, 41: 333-351.

Xu Z S. 2012b. An error-analysis-based method for the priority of an intuitionistic fuzzy preference relation in decision making. Knowledge-Based Systems 33: 173-179.

Xu Z S, Cai X Q. 2012a. Deriving priority weights from interval multiplicative preference relations. Group Decision and Negotiation, 2012, in press.

Xu Z S, Cai X Q. 2012b. Minimizing group discordance optimization model for deriving expert weights. Group Decision and Negotiation, 2012, in press.

Xu Z S, Cai X Q. 2012c. Uncertain power average operators for aggregating interval fuzzy preference relations. Group Decision and Negotiation 21: 381-397.

Xu Z S, Chen J. 2007. An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making. Information Sciences, 177: 248-263.

Xu Z S, Chen J. 2008. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations. European Journal of Operational Research 184: 266-280.

Xu Z S, Da Q L. 2002a. Linear objective programming method for priorities of hybrid judgement matrices. Journal of Management Sciences in China, 5(6): 24-28.

Xu Z S. Da Q L. 2002b. The ordered weighted geometric averaging operators. International Journal of Intelligent Systems, 17: 709-716.

Xu Z S, Da Q L. 2002c. The uncertain OWA operator. International Journal of Intelligent Systems, 17: 569-575.

Xu Z S, Da Q L. 2003a. An approach to improving consistency of fuzzy preference matrix. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2: 3-12.

Xu Z S, Da Q L. 2003b. An overview of operators for aggregating information. International Journal of Intelligent Systems, 18: 953-969.

Xu Z S, Da Q L. 2003c. New method for interval multi-attribute decision making. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 33(4): 498-501.

Xu Z S, Da Q L. 2003d. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application. Journal of Systems Engineering, 18(1): 67-70.

Xu Z S, Da Q L. 2005. A least deviation method to obtain a priority vector of a fuzzy preference relation. European Journal of Operational Research, 164: 206-216.

Xu Z S, Gu H F. 2002. An approach to uncertain multi-attribute decision making with preference information on alternatives. Proceedings of the 9th Bellman Continuum International Workingshop on Uncertain Systems and Soft Computing, Beijing, China, 89-95.

Xu Z S, Sun Z D. 2001. A method based on satisfactory degree of alternative for uncertainly multi-attribution decision making. Systems Engineering, 19(3): 76-79.

Xu Z S, Sun Z D. 2002. Priority method for a kind of multi-attribute decision-making problems. Journal of Management Sciences in China, 5(3): 35-39.

Xu Z S, Wei C P. 1999. A consistency improving method in the analytic hierarchy process. European Journal of Operational Research, 116: 443-449.

Xu Z S, Wei C P. 2000. A new method for priorities to the analytic hierarchy process. OR Transactions, 4(4): 47-54.

Yager R R. 1988. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 18: 183-190.

Yager R R. 1993. Families of OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 59: 125-148.

Yager R R. 1999. Induced ordered weighted averaging operators. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 29: 141-150.

Yager R R. 2007. Centered OWA operators. Soft Computing, 11: 631-639.

Yager R R. 2009. On generalized Bonferroni mean operators for multi-criteria aggregation. International Journal of Approximate Reasoning, 50: 1279-1286.

Yager R R, Filev D P. 1999. Induced ordered weighted averaging operators. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B, 29: 141-150.

Yoon K.1989. The propagation of errors in multiple attribute decision analysis: A practical approach. Journal of Operational Research of society, 40: 681-686.

Yu X H, Xu Z S, Liu S S, Chen Q. 2012. Multi-criteria decision making with 2-dimension linguistic aggregation techniques. International Journal of Intelligent Systems, 27: 539-562.

Yu X H, Xu Z S, Zhang X M. 2010. Uniformization of multigranular linguistic labels and their application to group decision making. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 19(3): 257-276.

Zahedi F. 1986. The analytic hierarchy process: a survey of the method and its applications. Interfaces, 16: 96-108.

Zeleny M. 1982. Multiple Criteria Decision Making. New York: McGraw-Hill.

Zhang F L, Wu J H, Jin Z Z. 2000. Evaluation of anti-ship missile weapon system's overall performance. Systems Engineering, Systems Science and Complexity Research, Research Information Ltd, Hemel Hempstead Hp27TD, United Kingdom, 573-578.

Zhu W D, Zhou G Z, Yang S L. 2009. Group decision making with 2-dimension linguistic assessment information. Systems Engineering---Theory & Practice, 27: 113-118.

واژه‌نامه

Achievement	دستیابی
Additive	جمع‌پذیر
Additive Linguistic Evaluation Scale	مقیاس ارزیابی زبانی جمع‌پذیر
Alternative	گزینه
Argument	نشانوند
Asymmetrically	نامتقارن
Balancing Coefficient	ضریب متعادل‌سازی
Boundedness	کرانداری
Closeness Degree	درجه نزدیکی
Collective	تجمعی
Collective Normalized Decision Matrix	ماتریس تصمیم نرمال جمعی
Combined Weighted Averaging (CWA)	میانگین وزندار ترکیبی
Combined Weighted Geometric (CWG)	هندسی وزندار ترکیبی
Commutativity	جابجایی
Complementary Scale	مقیاس مکمل
Complex	پیچیده
Conflict Analysis	تحلیل تناقض
Consensus Maximization	بیشینه‌سازی توافق جمعی
Consistent	سازگار
Convergent	همگرا
Cumulative Dominance	چیرگی تجمعی
Decision Matrix	ماتریس تصمیم
Deviation Function	تابع انحراف
Dimension	بُعد
Discrete	گسسته
Dominated	مغلوب
Eigenvector Method	روش بردار ویژه
Existence	وجودی
Extended Ordered Weighted Averaging (EOWA)	میانگین وزندار ترتیبی توسعه‌یافته

Extended Weighted Averaging (EWA)	میانگین وزندار توسعه‌یافته
Extremum	اکسترمم
Fused Projection Model	مدل افکنش آمیخته
Fuzzy Linguistic Quantifier	کمّی‌ساز زبانی فازی
Fuzzy Preference Relation	رابطه ترجیح فازی
Gaussian Distribution	توزیع گوسی
Generalized Induced Ordered Weighted Averaging (GIOWA)	میانگین وزندار ترتیبی استنتاجی تعمیم‌یافته
Generalized Triangular Fuzzy Number	عدد فازی مثلثی تعمیم‌یافته
Generalized Triangular Fuzzy Number (TFN)	اعداد فازی مثلثی تعمیم‌یافته
Generalized Uncertain Averaging	میانگین غیرقطعی تعمیم‌یافته
Granularity	دانه‌بندی
Group Discordance	عدم انسجام گروهی
Hesitant Aggregation Function	تابع تلفیق تردید
Homogenous	همگن
Hybrid Linguistic Weighted Averaging (HLWA)	میانگین وزندار زبانی ترکیبی
Hybrid Preference Relation	رابطه ترجیحی مرکب
Ideal Point	نقطه ایده‌آل
Idempotency	خودتوانی
Incomplete	ناقص
Individual	انفرادی
Individual Normalized Decision Matrix	ماتریس تصمیم نرمال انفرادی
Induced Ordered Weighted Averaging (IOWA)	میانگین وزندار ترتیبی استنتاجی
Infimum	کمینه مقدار
Information Entropy	آنتروپی اطلاعات
Information Theory	تئوری اطلاعات
Interactive	تعاملی
Invertible Matrix	ماتریس معکوس‌پذیر
Irreducible	تقلیل‌ناپذیر

Irreversible Phenomenon	پدیده برگشت‌ناپذیر
Iterative	تکرارشونده
Lagrange Function	تابع لاگرانژ
Lagrange Multiplier	ضریب لاگرانژ
Least Variation Method	روش حداقل پراکندگی
Linear Equally Weighted Summation	تجمیع وزنی برابر خطی
Linear Goal Programming Method	برنامه‌ریزی آرمانی خطی
Linguistic Hybrid Aggregation (LHA)	تجمیع و تلفیق پیوندی زبانی
Linguistic Weighted Max (LWM)	بیشینه وزندار زبانی
Lower Limit Projection Model	مدل افکنش حد بالا
Maintainability Design	طراحی با قابلیت نگهداری
Maximizing Deviations	بیشترین انحرافات
Modularization	ماژول‌بندی
Monotone Decreasing Sequence	دنبال نزولی یکنوا
Monotonicity	یکنواختی
Monotonicity	یکنوایی
Multi Attribute Decision Making (MADM)	تصمیم گیری چند شاخه
Multi Attribute Group Decision Making (MAGDM)	تصمیم‌گیری چندشاخصه گروهی
Multigranular linguistic	عبارات زبانی با دانه‌بندی چندگانه
Multiplicative Preference Relation	رابطه ترجیحی چندگان
Objective	عینی
Operator	عملگر
Optimization Level	سطح بهینگی
Ordered Weighted Averaging (OWA)	میانگین وزندار ترتیبی
Ordered Weighted Geometric (OWG)	هندسی وزندار ترتیبی
Partial Derivatives	مشتقات جزئی
Partial weight information	اطلاعات جزئی اوزان
Permutation	جایگشت

Permutation Invariance	تغییرناپذیری جایگشت
Positive Definite Matrix	ماتریس معین مثبت
Positive Ideal Overall Attribute Value	مقدار کلی ایده‌آل مثبت
Possibility	امکان
Preference	ترجیح
Preference Degree	درجه ترجیح
Preference Intensity	شدت ترجیح
Preference Relation	رابطه ترجیحی
Principal Assessment Information (PAI)	اطلاعات ارزیابی اصلی
Principle of Mathematical Analysis	اصل تحلیل ریاضی
Priority Theory	تئوری اولویت‌بندی
Priority Vector	بردار اولویت
Projection	افکنش (نگاشت)
Pure Linguistic Information	اطلاعات خالص زبانی
Rank Transitivity	تراگذر رتبه
Ratio Scale	مقیاس نسبتی
Reciprocal Scale	مقیاس متقابل
Reduction Strategy for Alternatives	استراتژی تقلیل گزینه‌ها
Reliability	قابلیت اطمینان
Robust	استوار
Satisfaction Degrees of Alternatives	درجات رضایت‌مندی گزینه‌ها
Score Aggregation Function	تابع تلفیق امتیازی
Self-Assessment Information	اطلاعات خود ارزیابی
Strictly Convex	اکیداً محدب
Strong Rank Preservation	محافظ رتبه قوی
Subjective	ذهنی
Subjective Evidential Reasoning	منطق شهودی ذهنی
Symmetrical Matrix	ماتریس متقارن

مرتب‌سازی عملکرد بر اساس شباهت به حل ایده‌آل	Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS)
روابط تبدیل عبارات زبانی چنددانه‌ای	Transformation Relationships Among Multigranular Linguistic Labels (TRMLLs)
روش انتقال	Translation Method
ماتریس تبدیل	Transformation Matrix
ترانهاده	Transpose
تابع عضویت مثلثی	Triangular Membership Function
میانگین وزندار مرتب زبانی دو بعدی	Two Dimension Linguistic Ordered Weighted Averaging (2DLOWA)
میانگین وزندار زبانی دو بعدی	Two Dimension Linguistic Weighted Averaging (2DLWA)
میانگین بونفرونی غیرقطعی	Uncertain Bonferroni Mean (UBM)
میانگین وزن‌دار ترتیبی توسعه‌یافته غیر قطعی	Uncertain Extended Ordered Weighted Averaging (UEOWA)
عملگر میانگین وزن‌دار توسعه‌یافته غیرقطعی	Uncertain Extended Weighted Averaging (UEWA)
تلفیق ترکیبی زبانی غیرقطعی	Uncertain Linguistic Hybrid Aggregation (ULHA)
میانگین وزنی غیرقطعی	Uncertain Weighted Averaging (UWA)
عدم قطعیت	Uncertainty
متغیر کمکی آزاد	Unconstrained Auxiliary Variable
ناموزون	Unevenly
یکتایی	Uniqueness
مدل افکنش حد پائین	Upper Limit Projection Model
مطلوبیت	Utility
سود مخاطره‌آمیز	Venture Profit
عبارت زبانی مجازی	Virtual Linguistic Label
میانگین وزندار	Weighted Averaging (WA)
چیرگی تجمعی میانگین وزندار	Weighted Averaging Cumulative Dominance Vector
هندسی وزندار	Weighted Geometric (WG)